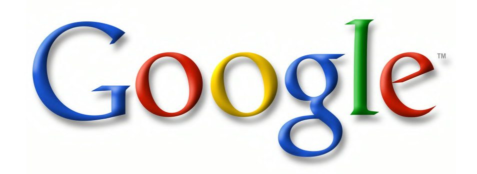
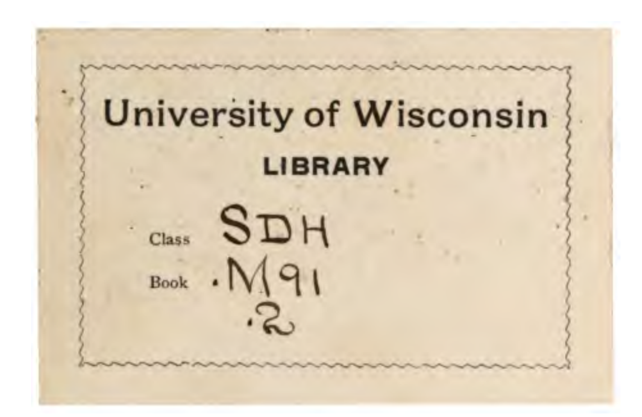
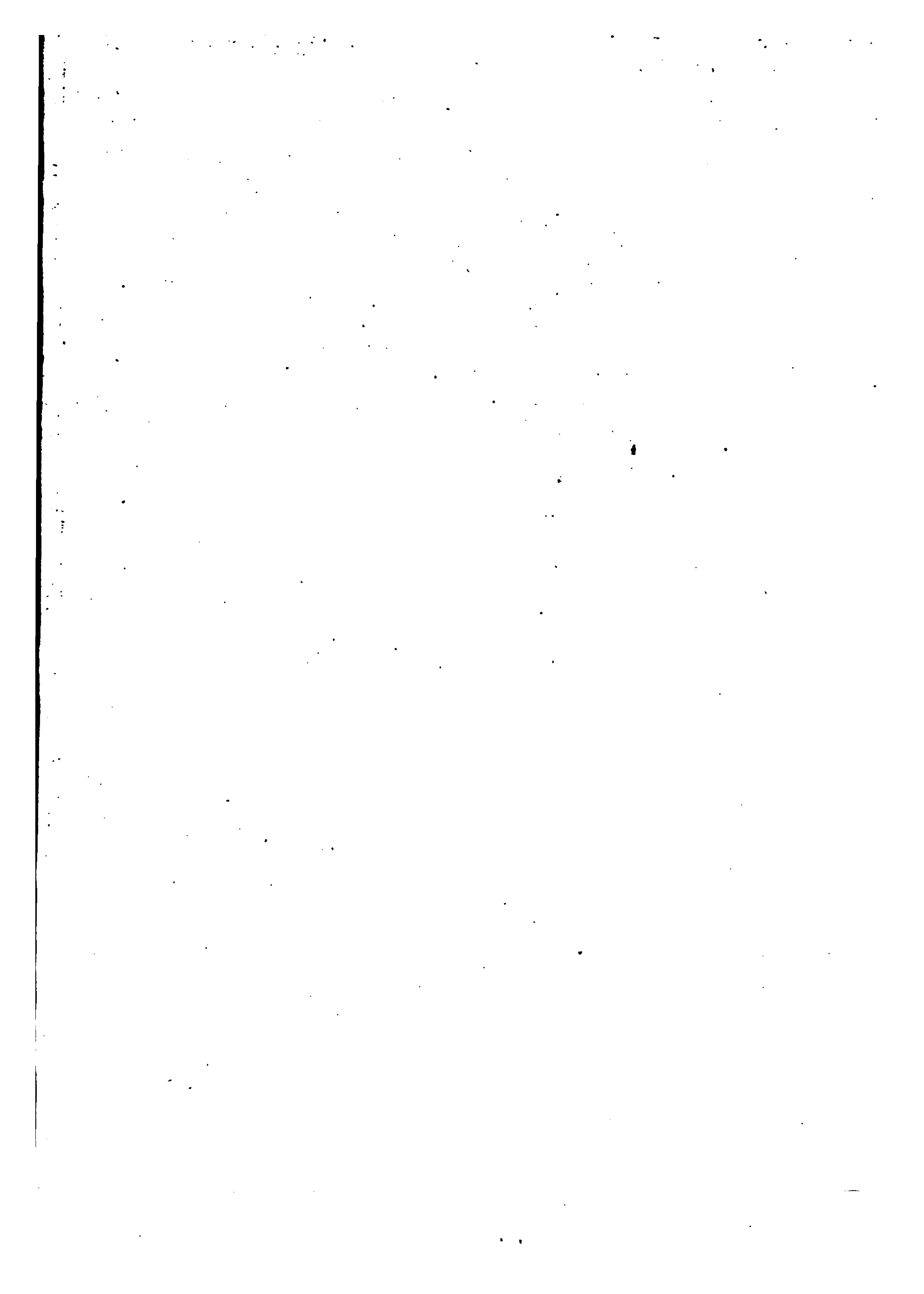
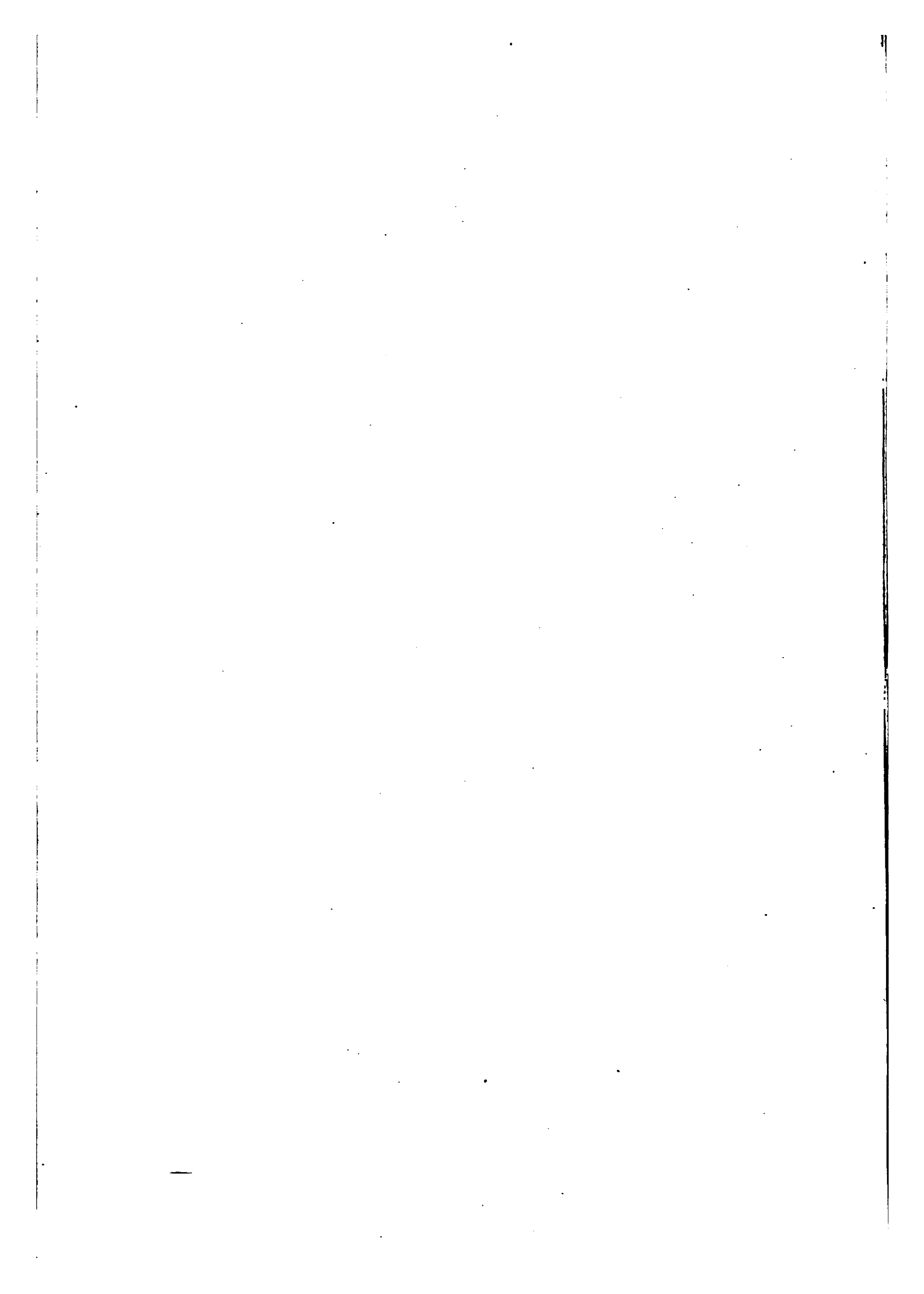








Die neueren Methoden

der

Festigkeitslehre

und der

Statik der Baukonstruktionen,

ausgehend von dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen und den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit;

von

Heinrich F. B. Müller-Breslau,

Professor an der Kgl. Technischen Hochschule in Berlin, ordentl. Mitglied der Kgl. Akademie des Bauwesens.

Zweite vermehrte und verbesserte Auflage.

Mit 188 Abbildungen im Text.

Leipzig,

Baumgärtner's Buchhandlung.

1893.

Druck von Grimme & Trömel in Leipzig.

Dem Andenken

an

ALBERTO CASTIGLIANO

(† 1885)

gewidmet.

Vorwort.

In dem vorliegenden Buche werden die von dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen und den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit ausgehenden Methoden der Festigkeitslehre im Zusammenhange vorgetragen. Die zur Erläuterung der allgemeinen Beziehungen zwischen den äusseren und inneren Kräften gewählten Aufgaben sind grösstentheils der Statik der Bauwerke und hier wiederum der Theorie der statisch unbestimmten Träger entlehnt worden; sie beziehen sich meistens auf schwierigere, zum Theil aber auch auf solche einfachere Fälle, die in anderer Weise ebenso kurz — und vielleicht noch kürzer — behandelt werden können, die aber mit aufgenommen wurden, weil die Gewinnung bekannter Ergebnisse auf neuen Wegen besonders geeignet sein dürfte, den Leser schnell mit den fraglichen Verfahren vertraut zu machen, wie denn überhaupt sämmtliche Aufgaben vornehmlich darauf hinzielen, die gegebenen Gesetze streng zu beweisen und in möglichst lehrreicher Art zu erklären, nicht aber, die Theorie einer beschränkten Anzahl von Fällen bis ins Einzelne auszufeilen. Es sind deshalb die meisten Aufgaben über statisch unbestimmte Träger nur soweit durchgeführt worden, bis die statische Unbestimmtheit gehoben war, da gerade die einheitliche Berechnung der an Elasticitätsgleichungen gebundenen äusseren und inneren Kräfte neben einer übersichtlichen Darstellung der Formänderungen das Feld bilden, auf welchem das Vorgetragene erfolgreich zu verwerthen ist.

Besonders eingehend wurde die Aufsuchung der Einflusslinien für die statisch nicht bestimmbaren Grössen ebener Träger behandelt, wozu es nöthig war, die — vielfach erweiterten und vereinfachten — Gesetze über die Biegungslinie (elastische Linie) abzuleiten, um mit

deren Hilfe die Berechnung der gesuchten Einflusslinien in besonders übersichtlicher Weise auf die Berechnung von Momentenlinien für einfache Balken zurückführen zu können.

Trotzdem sich das Buch an reifere, mit den Grundzügen der Festigkeitslehre und der Statik der Bauwerke bereits vertraute Leser wendet, und sein Umfang durch Voranstellung der im § 24 enthaltenen allgemeineren Untersuchungen etwas hätte gekürzt werden können, erschien es rathsam, mit der Betrachtung des übersichtlichsten Falles — der Theorie des Fachwerks — zu beginnen, und auch im zweiten Abschnitte der schärferen Untersuchung einfach gekrümmter Stäbe diejenigen vereinfachten Entwickelungen vorauszuschicken, die beispielsweise im Hochbau und Brückenbau bei der Berechnung von Bogenträgern stets Anwendung finden, da hier den Vorbedingungen der genaueren Theorie nur sehr unvollkommen entsprochen wird.

Die Ableitung des Gesetzes der virtuellen Verschiebungen für den elastischen Körper wurde, da sie den meisten Lesern aus der Mechanik geläufig sein dürfte, in einen Anhang verwiesen, der auch geschichtliche Angaben und Anführung einschlägiger Schriften enthält.

Auf die in diesem Buche gebotenen eigenen Untersuchungen brauche ich Kenner der Literatur nicht besonders hinzuweisen.

Berlin 1893.

H. Müller-Breslau.

Abschnitt I.

Theorie des Fachwerks.

§ 1.

Allgemeines über das ebene Fachwerk.

1) Ein Fachwerk ist eine Verbindung von Stäben, welche in den Knotenpunkten, d. h. in den Punkten, in denen mehrere Stabachsen zusammentreffen, durch reibungslose Gelenke miteinander befestigt sind. Greifen alle äusseren Kräfte in den Knotenpunkten an (was strenggenommen nur bei gewichtslosen Stäben möglich ist), so tritt in jedem Stabe eine mit der Achse desselben zusammenfallende Spannkraft auf, welche positiv oder negativ angenommen werden soll, je nachdem sie Zugspannungen oder Druckspannungen hervorbringt. Liegen alle Stabachsen und äusseren Kräfte in derselben Ebene, so heisst das Fachwerk ein ebenes.

Wir betrachten das ebene Fachwerk unter der Voraussetzung, dass die äusseren Kräfte sowohl für sich allein als auch mit den inneren Kräften im Gleichgewichte sind, und dass es zulässig ist, die durch die Elasticität des Materials der Fachwerkstäbe und der das Fachwerk stützenden fremden Körper bedingten Formänderungen als verschwindend klein aufzufassen. Es dürfen in diesem Falle in die Gleichgewichtsbedingungen alle Hebelarme und die Neigungswinkel der Stäbe mit denjenigen Werthen eingeführt werden, welche dem spannungslosen Anfangszustande des Fachwerks entsprechen.

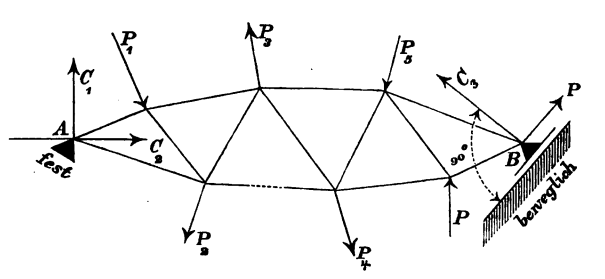


Fig. 1.

Die äusseren Kräfte sind theils gegeben und sollen dann **Lasten** heissen und mit P bezeichnet werden, theils bestehen sie aus den zu suchenden Widerständen C der das Fachwerk stützenden Körper. Die Stützpunkte, auch **Auflager** genannt, können **bewegliche** oder **feste** sein. Ein bewegliches Auflager entsteht, sobald ein Knotenpunkt gezwungen wird, auf einer gegebenen Linie zu bleiben, an der Bewegung längs dieser Linie aber durch den Zusammenhang mit dem Fachwerke gehindert wird; der Stützenwiderstand wirkt, wenn keine Reibung auftritt, senkrecht zu dieser Bahn, seine Richtung ist gegeben, seine Grösse wird gesucht.*)

Von dem Widerstande eines festen Auflagers ist hingegen sowohl die Grösse als auch die Richtung unbekannt, es sind — wie wir bei der Herleitung der allgemeinen Gesetze voraussetzen wollen — zwei Seitenkräfte desselben anzugeben.

Die nach festen Richtungen wirkenden Seitenkräfte der Stützenwiderstände lassen sich auch als die Spannkräfte in Stäben deuten, welche die fraglichen Stützpunkte mit ausserhalb des Fachwerks gelegenen festen Punkten verbinden und **Auflagerstäbe** genannt werden. Einem beweglichen Auflager entspricht *ein* Auflagerstab, zu einem festen gehören *zwei* Stäbe.

Bedeutet nun n' die Anzahl der beweglichen Auflager,
n'' „ „ „ festen „
r „ „ „ Fachwerkstäbe,

so sind $n' + 2n''$ Auflagerkräfte und r Spannkräfte zu berechnen, und hierzu stehen, bei k Knotenpunkten, $2k$ Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung.

Bezieht man nämlich das Fachwerk auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y) und bezeichnet mit Q_{xm} und Q_{ym} die parallel den Koordinatenachsen gebildeten Seitenkräfte der im Knotenpunkte m angreifenden äusseren Kraft Q_m (welche gegebene Last oder unbekannte Auflagerkraft sein kann), ferner mit $S_1, S_2 \ldots\ldots S_p$ die Spannkräfte in den von m ausgehenden Stäben und mit $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_p$ die Neigungs-

---

*) Reibungswiderstände an den beweglichen Auflagern dürfen wir hier ausschliessen. Bei grossem Reibungskoefficienten kann ein bewegliches Lager zu einem festen werden; tritt Bewegung ein, so ist der Reibungswiderstand in bestimmter Weise von dem Normaldrucke auf die Auflagerbahn abhängig; wir zählen ihn in diesem Falle zu den Lasten, über deren Grösse ja nichts vorausgesetzt zu werden braucht.

winkel dieser Stäbe gegen die x-Achse, so ergeben sich die beiden Gleichgewichtsbedingungen:

$$(1) \begin{cases} Q_{xm} + \sum_1^p S \cos \alpha = 0 \\ Q_{ym} + \sum_1^p S \sin \alpha = 0, \end{cases}$$

und zwei solcher Gleichungen ersten Grades lassen sich für jeden Knotenpunkt aufstellen.

Ist nun $n' + 2n'' + r > 2k$, so ist es nicht möglich, die Unbekannten lediglich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen, und das Fachwerk heisst ein statisch unbestimmtes.

Ist dagegen $n' + 2n'' + r < 2k$, so kann im Allgemeinen kein Gleichgewicht zwischen den äusseren und inneren Kräften bestehen; das Fachwerk ist beweglich.

Soll das Fachwerk statisch bestimmt und unbeweglich (stabil) sein, d. h. sollen sich die Auflagerkräfte und Spannkräfte mittelst der Gleichgewichtsbedingungen für jeden Belastungszustand eindeutig durch die äusseren Kräfte ausdrücken lassen, so muss $r + n' + 2n'' = 2k$ sein, und ausserdem darf die aus den Koefficienten der Bedingungsgleichungen (1) gebildete Determinante nicht gleich Null sein.*) Die Untersuchung dieser Determinante ist sehr umständlich, aber auch entbehrlich, da sich die Frage nach der statischen Bestimmtheit und Unbeweglichkeit eines ebenen Fachwerks stets schnell und sicher durch den Versuch entscheiden lässt, die Auflagerkräfte und Spannkräfte für einen ganz allgemeinen Belastungszustand eindeutig zu bestimmen. Meistens werden hierzu die bekannten Berechnungsverfahren ausreichen; für verwickeltere Fälle aber möge der folgende, immer zum Ziele führende Weg angegeben werden.

Man verwandle das fragliche Fachwerk durch Beseitigung von

---

*) Bezeichnet man die zu berechnenden Unbekannten allgemein mit Z_1, Z_2, Z_3 .... $Z_{i=2k}$, so lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} a_{1\cdot 1} Z_1 + a_{1\cdot 2} Z_2 + a_{1\cdot 3} Z_3 + \ldots\ldots + a_{1\cdot i} Z_i &= c_1 \\ a_{2\cdot 1} Z_1 + a_{2\cdot 2} Z_2 + a_{2\cdot 3} Z_3 + \ldots\ldots + a_{2\cdot i} Z_i &= c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i\cdot 1} Z_1 + a_{i\cdot 2} Z_2 + a_{i\cdot 3} Z_3 + \ldots\ldots + a_{i\cdot i} Z_i &= c_i, \end{aligned}$$

wobei $a_{1\cdot 1}$ bis $a_{i\cdot i}$ und c_1 bis c_i gegebene Grössen bedeuten. Damit sich sämmtliche Z mit Hilfe dieser Gleichungen berechnen lassen, ist erforderlich und ausreichend, dass die aus den Koefficienten a gebildete Determinante

$$R = \begin{vmatrix} a_{1\cdot 1} & a_{1\cdot 2} & a_{1\cdot 3} & \ldots\ldots & a_{1\cdot i} \\ a_{2\cdot 1} & a_{2\cdot 2} & a_{2\cdot 3} & \ldots\ldots & a_{2\cdot i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i\cdot 1} & a_{i\cdot 2} & a_{i\cdot 3} & \ldots\ldots & a_{i\cdot i} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null wird.

Stäben und Hinzufügung von ebensoviel neuen Stäben, welche kurz **Ersatzstäbe** genannt werden sollen, in ein Stabgebilde, dessen statische Bestimmtheit und Unbeweglichkeit ausser allem Zweifel steht und dessen Spannkräfte und Auflagerwiderstände sich auf möglichst einfache Weise ermitteln lassen. Die Spannkräfte der beseitigten Stäbe bringe man an dem neuen Fachwerke als äussere Kräfte an; sie mögen mit Z_a, Z_b, Z_c, ... Z_n bezeichnet werden. Hierauf stelle man die Spannkräfte des neuen Fachwerks als Funktionen der gegebenen Lasten P und der vorläufig unbekannten Kräfte Z dar. Sie erscheinen, da alle Gleichgewichtsbedingungen vom ersten Grade sind, in der linearen Form

$$(2) \quad S = \mathfrak{S}_o + \mathfrak{S}_a Z_a + \mathfrak{S}_b Z_b + \mathfrak{S}_c Z_c + \ldots + \mathfrak{S}_n Z_n,$$

wobei $\mathfrak{S}_o$ denjenigen Werth bedeutet, welchen S annimmt, sobald sämtliche Kräfte Z gleich Null gesetzt werden, sobald also nur die Lasten P auf das neue Fachwerk einwirken. Weiter bedeutet $\mathfrak{S}_a$ den Werth von S für den Fall, dass alle Lasten P verschwinden, desgleichen die Kräfte Z_b, Z_c, ... Z_n, während die beiden Kräfte Z_a die Grösse 1 annehmen, eine Belastungsweise, welche wir kurz den Zustand $Z_a = 1$ nennen wollen; und ganz ebenso lassen sich die Ziffern $\mathfrak{S}_b$, $\mathfrak{S}_c$, ... $\mathfrak{S}_n$ als die Spannkräfte für die Zustände $Z_b = 1$, $Z_c = 1$, ... $Z_n = 1$ auffassen. Die Ziffern $\mathfrak{S}_a$, $\mathfrak{S}_b$, $\mathfrak{S}_c$, ... $\mathfrak{S}_n$ sind unabhängig von den Lasten P, während die Spannkräfte $\mathfrak{S}_0$ für jeden neuen Belastungsfall von neuem ermittelt werden müssen.

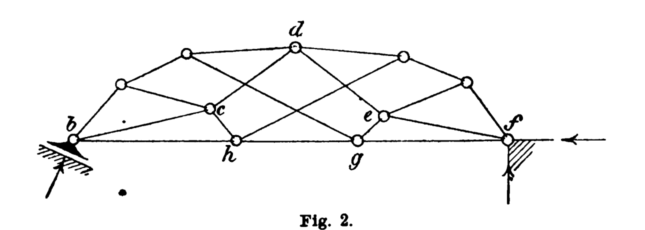


Fig. 2.

Setzt man schliesslich die Spannkräfte in den Ersatzstäben gleich Null, so erhält man ebensoviel Gleichungen ersten Grades, als Kräfte Z vorhanden sind, ist also imstande, die letzteren zu berechnen. Bedingung ist jedoch, dass die Nennerdeterminante jener Gleichungen einen von Null verschiedenen Werth annimmt. Diese Determinante (D), die von wesentlich niedrigerem Grade ist als die Determinante der Gleichungen (1) und deren Berechnung immer schnell von statten gehen wird, enthält nur die Ziffern $\mathfrak{S}_a$, $\mathfrak{S}_b$, ... $\mathfrak{S}_n$; sie ist mithin **von dem Belastungszustande unabhängig**.*) Ergiebt sich also $D \gtrless 0$, so besteht für **jeden** Belastungszustand Gleichgewicht und

*) Derselbe gilt natürlich auch von der Determinante der Gleichungen (1).

zwar ist es möglich, die Spannkräfte eindeutig durch die Lasten P auszudrücken; das Fachwerk ist unbeweglich und statisch bestimmt.

Um diese Verwandlung eines Fachwerks durch ein Beispiel zu erläutern, betrachten wir das in Fig. 2 dargestellte Stabgebilde, welches bei f ein festes und bei b ein bewegliches Auflager besitzt und aus 19 Stäben besteht. Die Gleichung $r + n' + 2n'' = 19 + 1 + 2 = 22 = 2k$ wird erfüllt, da die Anzahl der Knoten gleich 11 ist. Beseitigen wir die Stäbe bc und ef und fügen wir dafür die Stäbe dh und dg hinzu, so erhalten wir ein Fachwerk (Fig. 3), dessen

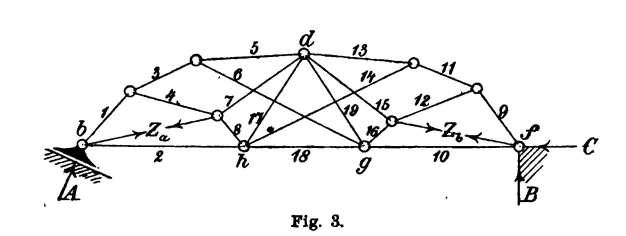


Fig. 3.

statische Bestimmtheit und Unbeweglichkeit ohne weiteres einleuchtet. Denn die Knoten dieses neuen Fachwerks lassen sich schrittweise an das Dreieck hdg in der Weise anschliessen, dass jeder Knoten durch 2 Stäbe festgelegt wird. Es entsteht dann eine steife gegliederte Scheibe, die infolge der Stützung bei f und b unverschieblich ist, sofern nur die Auflagerbahn bei b nicht mit der Geraden bf einen rechten Winkel bildet. Die drei Auflagerwiderstände A, B, C lassen sich für jeden Belastungszustand eindeutig durch die auf den Träger bf wirkenden Lasten P ausdrücken und die Berechnung der Spannkräfte ist stets in der durch die Ziffern 1, 2, ... 19 angedeuteten Reihenfolge möglich. Man findet für irgend einen Stab die Spannkraft $S = \mathfrak{S}_o + \mathfrak{S}_a Z_a + \mathfrak{S}_b Z_b$ und erhält, indem man schliesslich S_{17} und S_{19} gleich Null setzt:

$$0 = \mathfrak{S}_{o17} + \mathfrak{S}_{a17} Z_a + \mathfrak{S}_{b17} Z_b$$
$$0 = \mathfrak{S}_{o19} + \mathfrak{S}_{a19} Z_a + \mathfrak{S}_{b19} Z_b$$

und hieraus

$$Z_a = \frac{D_a}{D}; \quad Z_b = \frac{D_b}{D}$$

$$\text{wo } D = \begin{vmatrix} \mathfrak{S}_{a17} & \mathfrak{S}_{b17} \\ \mathfrak{S}_{a19} & \mathfrak{S}_{b19} \end{vmatrix} = \mathfrak{S}_{a17}\mathfrak{S}_{b19} - \mathfrak{S}_{a19}\mathfrak{S}_{b17}$$

$$D_a = -(\mathfrak{S}_{o17}\mathfrak{S}_{b19} - \mathfrak{S}_{o19}\mathfrak{S}_{b17})$$
$$D_b = -(\mathfrak{S}_{a17}\mathfrak{S}_{o19} - \mathfrak{S}_{a19}\mathfrak{S}_{o17}).$$

Wir nehmen nun die allgemeine Untersuchung wieder auf und setzen voraus, es seien Z_a, Z_b, ... Z_n auf die beschriebene Weise auf die Form $Z_n = D_n : D$ gebracht worden. Ergiebt sich $D \gtrless 0$, so ist das Fachwerk statisch bestimmt und unbeweglich. Ist hingegen $D = 0$, so ist das Fachwerk unbrauchbar; ein Gleichgewichtszustand, herbeigeführt durch endliche Spannkräfte ist nur möglich, wenn die äusseren Kräfte den Bedingungen

$$D_a = 0,\ D_b = 0,\ \ldots\ D_n = 0$$

genügen, dann aber erscheinen die Spannkräfte im allgemeinen in der unbestimmten Form 0 : 0 und nehmen nur dann bestimmte Werthe an, wenn die Zähler- und Nennerdeterminanten gemeinschaftliche Faktoren besitzen, durch deren Verschwinden sie gleich Null werden.

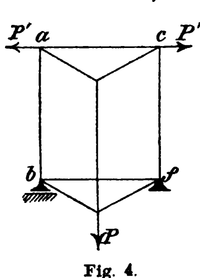


Fig. 4.

Die an jedes Fachwerk zu stellende Forderung aber, dass für jeden Belastungszustand Gleichgewicht bestehen muss, wird nicht erfüllt. Bleiben nämlich im Falle $D = 0$ die Determinanten D_a und D_b endlich, so beweist dies entweder, dass nach Beseitigung der eingefügten Ersatzstäbe Gleichgewicht überhaupt nicht möglich ist oder dass ein Fachwerk vorliegt, in welchem durch endliche äussere Kräfte unendlich grosse innere Kräfte hervorgerufen werden. Der erste Fall liegt beispielsweise vor bei dem in Fig. 4 dargestellten Fachwerk, welches mittels eines Ersatzstabes 1 in das Fachwerk in Fig. 5 verwandelt werden möge. Bildet man

$$S_1 = \mathfrak{S}_{o1} + \mathfrak{S}_{a1} Z_a$$

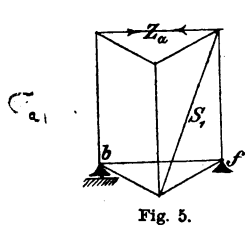


Fig. 5.

und setzt $S_1 = 0$, so erhält man $Z_a = \frac{\mathfrak{S}_{o1}}{\mathfrak{S}_{a1}}$ und wegen $\mathfrak{S}_{a1} = 0$ (was leicht einzusehen ist) $Z_a = \infty$. Nimmt man den Ersatzstab heraus, so ist Gleichgewicht im allgemeinen nicht möglich; man erkennt auf den ersten Blick, dass das Fachwerk in Fig. 4 von endlicher Beweglichkeit ist. Für gewisse Belastungsfälle jedoch besteht Gleichgewicht, beispielsweise für die in der Figur 4 angegebene Angriffsweise. Ist $P = 0$ so lassen sich die Stabkräfte sogar eindeutig berechnen; man erhält für den Stab ac die Spannkraft $S = + P'$ für alle übrigen Stäbe $S = 0$. Tritt P hinzu, so giebt es unendlich viele Systeme von Kräften S, die mit den äusseren Kräften im Gleichgewicht sind.

Der zweite Fall — nämlich das Auftreten unendlich grosser Stab-

kräfte infolge endlicher Lasten — erfordert eine eingehendere Prüfung, die an der Hand einiger leicht zu überschauenden Sonderfälle erfolgen möge.

Wir gehen von dem bekannten statisch bestimmten Dreigelenkbogen aus, Fig. 6, nehmen im Scheitel eine lothrechte Last P an und bestimmen mittels der Gleichgewichtsbedingung $\frac{Pl}{2} - Hf = 0$ den Horizontalschub

$$H = \frac{Pl}{2f}.$$

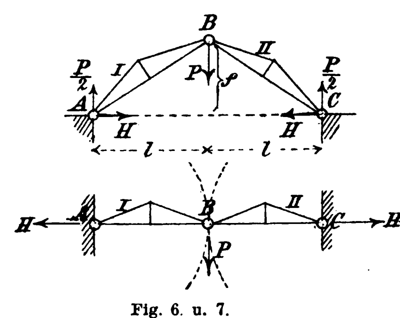


Fig. 6. u. 7.

Nehmen wir $f = 0$ an, Fig. 7, so wird $H = \infty$; es liegt dann ein Fachwerk von unendlich kleiner Beweglichkeit vor, denn der Punkt B wird in zwei Kreisbögen, deren Mittelpunkte in A bezieh. C liegen, geführt und vermag sich innerhalb des beiden Bögen gemeinschaftlichen Elementes ds frei zu bewegen. Wird die Last P aufgebracht, so besteht zunächst kein Gleichgewicht; hat sich aber B im Sinne von P um $\frac{1}{2}\,ds$ verschoben, so ist die Ruhelage erreicht, und es entsteht dann

$$H = \frac{Pl}{ds} = \infty.$$

Ganz ähnlich verhält sich das Fachwerk in Fig. 8. Nach einer unendlich kleinen Verrückung der Punkte a und b im Sinne von P befindet sich das Fachwerk in einer Ruhelage; es herrschen aber unendlich grosse Spannkräfte.

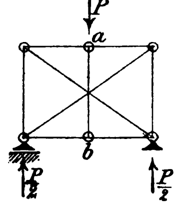


Fig. 8.

Weitere Beispiele für Fachwerke von unendlich kleiner Beweglichkeit lassen sich aus Fig. 6 mit Hilfe des von Föppl eingeführten Begriffs des imaginären Gelenks herleiten.

Werden zwei Scheiben bei G drehbar mit einander verbunden, so nennt man G ein wirkliches Gelenk; in G greifen die entgegengesetzt gleichen Kräfte D an, mit denen die Scheiben bei Eintritt einer Belastung auf einander wirken. Erfolgt die Verbindung der beiden Scheiben durch zwei Stäbe, Fig. 10, so nennt man den Schnittpunkt G der Stabachsen ein imaginäres Gelenk, und die Mittelkraft der in den Verbindungsstäben auftretenden Spannkräfte stellt die Kraft D vor, mit der die eine Scheibe auf die andere wirkt.

Mittels dieser Definition lässt sich das Fachwerk in Fig. 11, dessen Stäbe *ab* und *cd* an der Kreuzungsstelle *B* nicht mit einander ver-

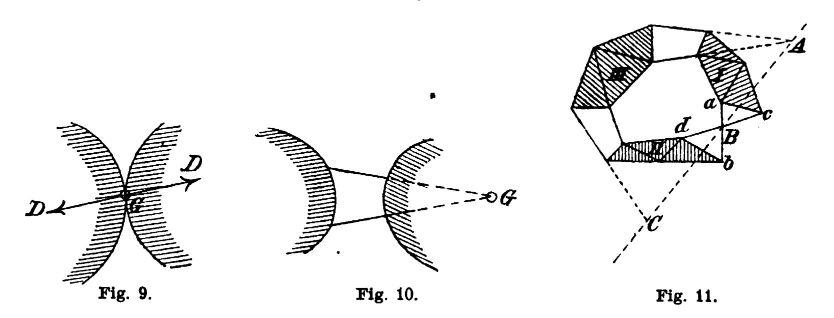


Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11.

bunden sein mögen, als Dreigelenkbogen mit drei imaginären Gelenken deuten.

Wird die Scheibe III als das Widerlager betrachtet, so sind *A* und *C* die Kämpfergelenke, *B* das Scheitelgelenk und in derselben Weise kann das in Fig. 12 dargestellte Paskal'sche Sechseck als Dreigelenkbogen aufgefasst werden.*) Da *A*, *B*, *C* in einer Geraden liegen, sind beide Fachwerke von unendlich kleiner Beweglichkeit; endliche äussere Kräfte vermögen in denselben unendlich grosse Spannkräfte hervorzurufen, der Gleichgewichtszustand tritt aber erst nach einer verschwindend kleinen Verrückung der Knotenpunkte ein.

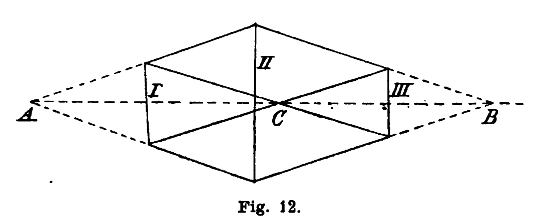


Fig. 12.

Auch das Fachwerk in Fig. 13 (Bogenträger mit zwei festen Auflagern *f* und einem beweglichen Auflager *b*) lässt sich auf die in Fig. 14 veranschaulichte Weise als Dreigelenkbogen von unendlich kleiner Beweglichkeit deuten. Die Scheibe IV bedeutet das Widerlager, die Scheibe III spielt die Rolle eines Stabes und bestimmt

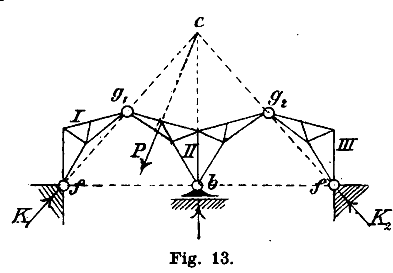


Fig. 13.

*) Ein Sonderfall wurde bereits in Fig. 8 dargestellt.

zusammen mit dem das Gleitlager ersetzenden Stabe V das imaginäre Kämpfergelenk C. Die in B angreifende Last P_1 erzeugt nach Eintritt der Ruhelage unendlich grosse Stabkräfte; hingegen besteht für den Belastungsfall in Fig. 13 sofort (d. h. ohne dass erst eine verschwindend kleine Bewegung erfolgt) Gleichgewicht; es giebt aber unendlich viele Systeme von Spannkräften S, welche die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen.

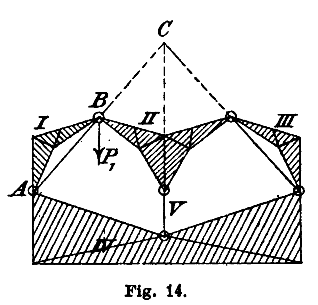


Fig. 14.

Nun ist aber zu beachten, dass die ganze vorstehende Untersuchung an die Annahme starrer Stäbe und Widerlager geknüpft ist — eine Voraussetzung, die in Wirklichkeit nie erfüllt wird.

So werden sich die Längen der Stäbe AB und BC des Fachwerks in Fig. 7 um endliche Strecken Δl ändern, und es wird selbst im Falle starrer Widerlager ein endlicher nach unten zeigender Pfeil $f = \sqrt{(l + \Delta l)^2 - l^2}$ entstehen, wofür unter Vernachlässigung von Δl^2

$$f = \sqrt{2\, l\, \Delta l} = l \sqrt{\frac{2\,S}{EF}}$$

gesetzt werden darf, wenn S die Spannkraft in AB und BC, F den Stabquerschnitt und E die Elasticitätsziffer bedeutet. Da die Winkel, um welche sich die Stäbe drehen, sehr klein sind, darf $S = H = \frac{Pl}{2f}$ angenommen werden, womit schliesslich

$$H = \sqrt[3]{\frac{P^2 EF}{8}}$$

erhalten wird, d. i. ein Werth der um so grösser wird, je grösser E, d. h. je weniger elastisch der Stab ist. Für den starren Stab ist $E = \infty$ und $H = \infty$.

Und ganz in derselben Weise ergeben sich bei den in den Figuren 8, 11, 12, 13 dargestellten Fachwerken fürjeden Belastungszustand ganz bestimmte, von den Elasticitätsziffern E und den Querschnittsabmessungen abhängige Spannkräfte S, so zwar dass für gewisse Belastungsweisen die S unendlich gross werden, sobald man die E gleich unendlich setzt.

Erweisen sich nun auch die fraglichen Fachwerke — bei genügenden Querschnittsabmessungen — als tragfähig, so wird es sich doch empfehlen, den oben ausgesprochenen Satz: „das Fachwerk ist unbrauchbar, sobald die Determinante D der zur Bestimmung der Stab-

kräfte Z_a, Z_b, ... Z_n aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen verschwindet" aufrecht zu erhalten. Ja es empfiehlt sich sogar diesen Ausspruch dahin zu verschärfen, dass man das Fachwerk schon als unbrauchbar bezeichnet, sobald sich die Determinante D der Null sehr nähert. Denn im Falle eines sehr kleinen D ist es leicht möglich, dass das Fachwerk infolge geringfügiger Änderungen der Stablängen und Verschiebungen der elastischen Widerlager eine Lage durchschreitet, welcher $D = 0$ entspricht. Auch leuchtet ein, dass bei gewissen Fachwerken, z. B. sehr flachen Bogenbrücken die Vernachlässigung der Formänderungen bei Ermittelung der Spannkräfte unzulässig ist.

2) Wir gehen jetzt zur Untersuchung derjenigen statisch unbestimmten Fachwerke über, welche sich durch Beseitigung gewisser Stäbe und Auflagerkräfte — welche in der Folge überzählig genannt werden sollen — in ein statisch bestimmtes und ausschliesslich elastischen Formänderungen unterworfenes Stabgebilde (das Hauptnetz) verwandeln lassen. Die Stäbe und Auflagerkräfte des Hauptnetzes heissen die nothwendigen Glieder des Fachwerks.

Werden die überzähligen Stäbe entfernt und, damit an dem Spannungszustande des Fachwerkes nichts geändert werde, die Spannkräfte in den weggenommenen Stäben als äussere Kräfte wieder hinzugefügt, so ist es möglich, die Spannkräfte in den nothwendigen Stäben und die nothwendigen Auflagerkräfte durch die gegebenen Lasten und die unbekannten überzähligen Stabkräfte und Auflagerkräfte auszudrücken. Hierbei können sich nur Beziehungen ersten Grades ergeben, weil in den Gleichgewichtsbedingungen alle Kräfte ausschliesslich in der ersten Potenz vorkommen. Da es nun weiter freisteht, die überzähligen Stabkräfte und Auflagerkräfte als geradlinige Funktionen anderer, ebenfalls in der ersten Potenz vorkommender Unbekannten darzustellen, beispielsweise als Funktionen ihrer Momente, bezogen auf gegebene Drehpunkte, so darf man behaupten:

Sämmtliche Spannkräfte S und Auflagerkräfte C eines statisch unbestimmten Fachwerks lassen sich stets auf die Form bringen:

$$(3) \quad \begin{cases} S = S_0 + S'X' + S''X'' + S'''X''' + \ldots\ldots \\ C = C_0 + C'X' + C''X'' + C'''X''' + \ldots\ldots \end{cases}$$

wobei X', X'', X''' ...... gewisse, statisch nicht bestimmbare Grössen bedeuten, während S_0, S', S'' ...., C_0, C', C'' .... Werthe vorstellen, welche von den Unbekannten X unabhängig sind. Insbesondere bedeuten S_0 und C_0 die Spannkräfte und Auflagerkräfte des statisch bestimmten Hauptnetzes, in welches das Fachwerk übergeht, sobald sämmtliche Grössen X verschwinden; sie sind

*geradlinige Funktionen der Lasten P, während die S', S'' .... C', C'' .... von den P unabhängig sind.**)

Beispiel. Der in Fig. 15 dargestellte, bei A, B und C unverschieblich gelagerte Dachbinder wird statisch bestimmt, sobald der Stab EC, dessen Spannkraft $= X$ sein möge, beseitigt wird. In den Knotenpunkten E und C sind die Kräfte X wieder anzubringen.

Um nun die Spannkraft in irgend einem Stabe, z. B. in LN zu berechnen, werde die Ritter'sche Methode angewendet. Es wird das Fachwerk durch einen Schnitt, welcher ausser LN nur noch zwei Stäbe trifft, in zwei Theile zerlegt. An den Schnittstellen werden die inneren Kräfte S_1, S_2, S_3 der geschnittenen Stäbe als äussere Kräfte angebracht, und nun wird für die auf den einen der beiden Fachwerkstheile, z. B. den linken, wirkenden äusseren Kräfte die Gleichung der statischen Momente aufgestellt, wobei, wenn es sich um die Berechnung von S_1 handelt, der Schnittpunkt von S_2 und S_3 zum Drehpunkte gewählt wird.

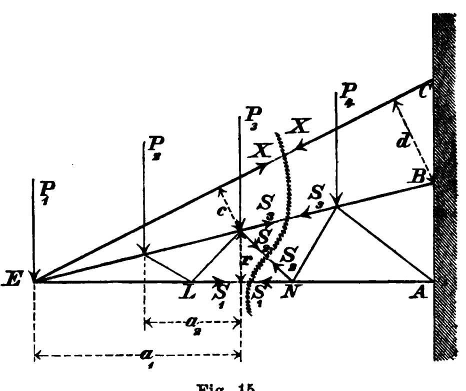


Fig. 15.

Mit den Bezeichnungen in Fig. 15 ergiebt sich

$$Xc - P_1 a_1 - P_2 a_2 - S_1 r = 0 \text{ und hieraus}$$

$$S_1 = -\frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{r} + X\frac{c}{r},$$

und in gleicher Weise lassen sich die Kräfte S in sämmtlichen übrigen nothwendigen Stäben als geradlinige Funktionen der Lasten P und der Grösse X darstellen.

An Stelle von X hätte man auch das auf den Knotenpunkt B bezogene Moment: $M = Xd$ dieser Kraft zu derjenigen statisch nicht bestimmbaren Grösse wählen können, durch welche die S ausgedrückt werden sollen und und würde erhalten haben:

$$S_1 = -\frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{r} + \frac{Mc}{dr}.$$

3) Für die Folge ist es nicht unwichtig, besonders hervorzuheben, dass die mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen hergestellten Beziehungen (3) zwischen den S, C, P und X für beliebige Werthe der Lasten P und der statisch nicht bestimmbaren Grössen X giltig sind, und dass mithin die theilweise Differentiation von S und C beispielsweise nach X' liefert:

---

*) Die Gleichungen 2 gelten für die nothwendigen und überzähligen Stäbe und Auflagerkräfte. Ist z. B. X'' die Spannkraft in einem überzähligen Stabe, so entsprechen diesem die Werthe: $S_0 = 0$, $S' = 0$, $S'' = 1$, $S''' = 0$ u. s. w. und es folgt $S = X''$.

$$\frac{\partial S}{\partial X'} = S' \text{ und } \frac{\partial C}{\partial X'} = C'.$$

Ferner ist zu beachten, dass S' und C' diejenigen Werthe bedeuten, welche die Spannkräfte und Auflagerkräfte annehmen, sobald $X' = 1$ wird, während sämmtliche Lasten P und die übrigen statisch nicht bestimmbaren Grössen: X'', X''' ..... verschwinden, ein Belastungszustand, welcher kurz der „Zustand $X' = 1$“ genannt werden möge.

Man kann sagen:

Die durch die Ursache $X' = 1$ hervorgerufenen Auflagerkräfte C' und Spannkräfte S' sind mit einander im Gleichgewichte.

Ebenso sind die C'' im Gleichgewichte mit den S'', die C''' mit den S''' u. s. w.

§ 2.

Allgemeines über das räumliche Fachwerk.

1) Bedeuten für ein Fachwerk mit beliebig im Raume vertheilten Knotenpunkten Q_{xm}, Q_{ym}, Q_{zm} die den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems parallelen Seitenkräfte der in irgend einem Knotenpunkte m angreifenden äusseren Kraft Q_m, ferner S_1, S_2 ... S_p die Spannkräfte in den von m ausgehenden Stäben und α_1, α_2 .... α_p, β_1, β_2 .... β_p, γ_1, γ_2 .... γ_p die Neigungswinkel der Stabachsen gegen die Koordinatenachsen x, y und z, so lauten die Bedingungen für das Gleichgewicht der in m wirksamen äusseren und inneren Kräfte:

$$(4) \quad \begin{cases} Q_{xm} + \sum_1^p S \cos \alpha = 0 \\ Q_{ym} + \sum_1^p S \cos \beta = 0 \\ Q_{zm} + \sum_1^p S \cos \gamma = 0, \end{cases}$$

und es ist, bei k Knotenpunkten, die Anzahl dieser Bedingungen $= 3\,k$. Zu berechnen sind

$$r + 3\,n''' + 2\,n'' + n' \text{ Unbekannte.}$$

wobei $r =$ Anzahl der Stäbe,

$n''' =$ „ „ festen Stützpunkte,

$n'' =$ „ „ auf einer Linie als Auflagerbahn beweglichen Stützpunkte,

$n' =$ „ „ auf einer Fläche als Auflagerbahn beweglichen Stützpunkte.

Es erfordert nämlich die Bestimmung des Widerstandes eines festen Stützpunktes die Angabe von 3 Seitenkräften, während bei Führung des beweglichen Stützpunktes durch eine Linie oder eine Fläche be-

ziehungsweise zwei Seitenkräfte oder eine Seitenkraft zur Feststellung des Auflagerdruckes ausreichen.

Im Falle $r + 3\,n''' + 2\,n'' + n' > 3\,k$ ist das Fachwerk statisch unbestimmt und im Falle $r + 3\,n''' + 2\,n'' + n' < 3\,k$ ist es verschieblich.

Ist $r + 3\,n''' + 2\,n'' = n' = 3\,k$, und ist die aus den Koefficienten der Gleichungen (3) gebildete Determinante nicht gleich Null (vergl. die Anmerkung auf Seite 3), so ist das Fachwerk statisch bestimmt und unbeweglich; sämmtliche Unbekannten lassen sich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen eindeutig berechnen. Die Anwendung der Gleichungen (4) ist nur dann bequem, wenn das Fachwerk mindestens einen Knotenpunkt besitzt, von dem nur drei Stäbe, deren Berechnung sich dann schnell durchführen lässt, ausgehen, und wenn es ferner so gebaut ist, dass man an jedem folgenden Knotenpunkte höchstens drei unbekannten Stabkräften begegnet. Ein derartiges Stabgebilde, das wir ein Fachwerk der einfachsten Art nennen wollen, entsteht z. B. wie folgt (vergl. den in Fig. 16 dargestellten Grundriss einer Kuppel).

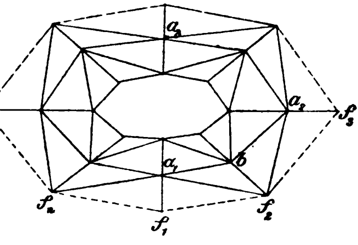


Fig. 16.

Es seien f_1, f_2, f_3 .... feste Punkte, und a_1, a_2, a_3, ... Knotenpunkte, welche mit den Punkten f durch je drei Stäbe, deren Achsen nicht in derselben Ebene liegen dürfen, verbunden sind, z. B. a_1 mit f_n, f_1 und f_2, Punkt a_2 mit f_2, f_3, f_4. An drei beliebige Knoten dieses uubeweglichen Stabgebildes seien drei neue Stäbe angeschlossen, die in einem neuen Knoten b zusammenhängen, und dieses Verfahren: Festlegung eines Knotens mit Hilfe von drei nicht in derselben Ebene liegenden Stäben sei beliebig oft wiederholt.

Die Spannkräfte S in einem solchen Fachwerk lassen sich auch sehr leicht zeichnerisch durch wiederholte Lösung der Aufgabe ermitteln: drei in einem Punkte m angreifende Kräfte S_1, S_2, S_3, deren Richtungen bekannt sind, so zu bestimmen, dass sie einer ebenfalls in m angreifenden gegebenen Kraft P das Gleichgewicht halten. Da das räumliche Fachwerk in der Literatur bisher nur wenig behandelt worden ist, möge die Lösung der vorliegenden Aufgabe hier Platz finden, obgleich die Untersuchung statisch bestimmter Konstruktionen eigentlich nicht Gegenstand des vorliegenden Buches ist.*)

*) Ausführliches findet sich in: Müller-Breslau, Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks, Berlin 1892, Wilhelm Ernst u. Sohn.

Die fragliche Kräftezerlegung ist in den Figuren 17 und 18 ausgeführt worden. Fig. 17 zeigt die Richtungen der Kräfte P, S_1, S_2 S_3 im Aufriss und Grundriss; Fig. 18 enthält den Aufriss und Grundriss des geschlossenen Kräftezuges. Man lege durch die Endpunkte von P

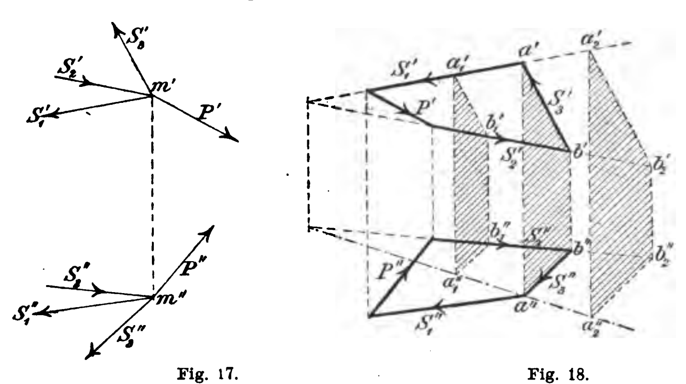


Fig. 17. Fig. 18.

Parallelen zu zwei S-Richtungen, beispielsweise zu S_1 und S_2 und zeichne hierauf ein Viereck $a'b'b''a''$, dessen Ecken in den Geraden S'_1, S'_2, S''_2, S''_1 liegen und dessen Seiten parallel zu S'_3, S''_3 und zu den Projektionsstrahlen sind. Zur Bestimmung dieses Vierecks wurden in Fig. 18 zunächst zwei Hilfsvierecke $a'_1\ b'_1\ b''_1\ a''_1$ und $a'_2\ b'_2\ b''_2\ a''_2$ aufgetragen, deren Eckpunkte a'_1, b'_1, b''_1 und a'_2, b'_2, b''_2 in den vorgeschriebenen Geraden S'_1, S'_2, S''_2 liegen, und deren Seiten die vorgeschriebenen Richtungen haben. Es ist dann die Gerade $a''_1\ a''_2$ der Ort des Punktes a'', und hiermit ist die Lage des Punktes a'' und das Viereck $a'\ b'\ b''\ a''$ bestimmt. Denn:

Aendert ein n-Eck in der Weise seine Form, dass sämmtliche Seiten desselben durch feste Punkte einer und derselben Geraden gehen (die im vorliegenden Falle die unendlich ferne Gerade ist), während n—1 Eckpunkte gerade Linien beschreiben, so bewegt sich auch der letzte Eckpunkt in einer Geraden.

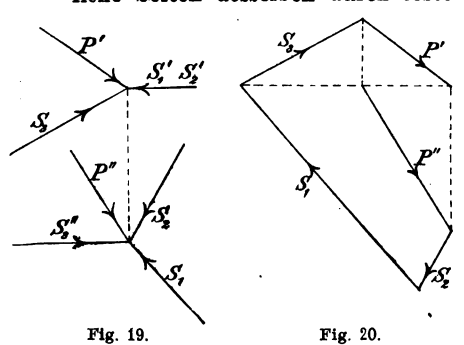


Fig. 19. Fig. 20.

Die Schnittpunkte der Geradenpaare S'_1, S'_2 und $\overline{a''_1\ a''_2}$, S''_2 liegen in einer Parallelen zu $m'\ m''$, und es genügt daher — eine günstige Lage des

Schnittpunktes von S'_1 und S'_2 vorausgesetzt — die Aufzeichnung eines der beiden Hilfsvierecke.

Ganz besonders einfach gestaltet sich die Ermittelung der Kraft S, wenn man die Projektionsebenen so wählt, dass sie die Stabachsen enthalten. Liegt beispielsweise S_3 in der Aufrissebene, S_1 und S_2 in der Grundrissebene, Fig. 19, so ergiebt sich der ohne weitere Erklärung verständliche, in Fig. 20 dargestellte Kräfteplan.

Die Ermittelung der Spannkräfte anderer Fachwerke kann nun mit Hilfe des im § 1 für das ebene Fachwerk angegebenen allgemeinen Verfahrens erfolgen. Man verwandele das Fachwerk durch Beseitigung von Stäben und Hinzufügung von ebensoviel Ersatzstäben in ein solches der einfachsten Art, stelle die Spannkräfte in der Form

$$S = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_a Z_a + \mathfrak{S}_b Z_b + \mathfrak{S}_{cn} Z_n$$

dar und setze schliesslich die Spannkräfte in den Ersatzstäben gleich Null.

Liegt zum Beispiel das in Figur 21 im Grundriss dargestellte Fachwerk vor, so führe man die Spannkräfte in vier Stäben des obersten Ringes als Z-Kräfte ein und füge die in der Abbildung durch gestrichelte Linien angedeuteten Ersatzstäbe 38, 41, 44, 47 hinzu, welche die Punkte a mit ausserhalb des Fachwerks angenommenen festen Punkten f' verbinden. Die Richtungen dieser Stäbe sind nur an die Bedingungen gebunden, dass Stab 41 nicht in die Ebene af_2f_3 fallen darf, Stab 44 nicht in die Ebene af_1f_2 u. s. w. Die Stabkräfte S werden in der durch die Ziffern 1 bis 48 angegebenen Reihenfolge durch die Kräfte Z und Lasten P ausgedrückt, und schliesslich werden die Spannkräfte S_{38}. S_{41}, S_{44}, S_{47} gleich Null gesetzt.

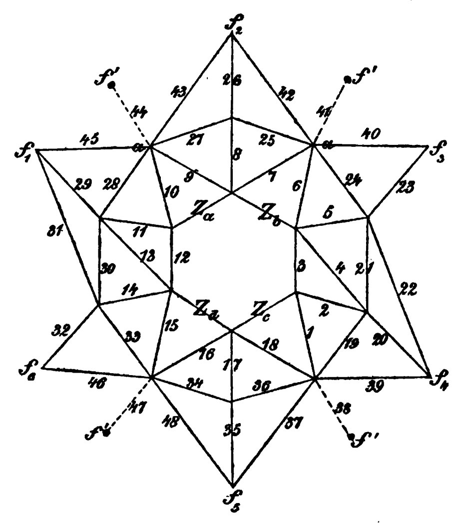


Fig. 21.

Die in § 1 unter 2) und 3) angestellten Betrachtungen gelten nicht nur für das ebene, sondern auch für das räumliche unbewegliche Fachwerk; auch bei dem letzteren ist es stets möglich, die Spannkräfte S und Auflagerkräfte C als geradlinige Funktionen der Lasten P und gewisser statisch nicht bestimmbarer Grössen X', X'' .... darzustellen.

§ 3.

Berechnung der statisch nicht bestimmbaren Grössen X', X'' .... für beliebige, ebene oder räumliche Fachwerke.

1. Allgemeine Form der Bedingungen für die Grössen X. Die Längen s der Stäbe eines ebenen oder räumlichen Fachwerks mögen um Strecken $\overline{\Delta s}$ zunehmen, und im Zusammenhange hiermit mögen die Knotenpunkte ihre auf ein beliebiges, festes Koordinatensystem bezogenen Lagen ändern, wobei:

$\overline{\Delta c}$ = Verschiebung eines Stützpunktes im Sinne der in demselben angreifenden Auflagerkraft C,*)

$\overline{\delta}$ = Verschiebung des Angriffspunktes irgend einer Last P im Sinne von P.

Bezüglich aller dieser Verschiebungen wird nur vorausgesetzt, dass sie möglich sind und klein genug, um als verschwindende Grössen aufgefasst werden zu dürfen. Es gilt dann der Satz von den virtuellen Verrückungen (Princip der virtuellen Geschwindigkeiten), welcher aussagt, dass im Falle des Gleichgewichtes der inneren und äusseren Kräfte die Arbeit der ersteren entgegengesetztgleich derjenigen der letzteren ist, und es folgt die Gleichung:

$$(5)\quad \Sigma P\overline{\delta} + \Sigma C\overline{\Delta c} = \Sigma S\overline{\Delta s},$$

welche wir die Arbeitsgleichung des Fachwerks nennen wollen, und welche mit den durch die Gleichungen 3 für C und S gegebenen Werthen übergeht in

$$(6)\quad \Sigma P\overline{\delta} + \Sigma (C_0 + C'X' + C''X'' + \ldots.)\overline{\Delta c}$$
$$= \Sigma (S_0 + S'X' + S''X'' + \ldots.)\overline{\Delta s};$$

sie gilt für beliebige Werthe der Lasten P und statisch nicht bestimmbaren Grössen X', X'' ....

Wir schreiben nun der Grösse X' den Werth $X' = 1$ zu, sämmtlichen Lasten P hingegen und den übrigen statisch nicht bestimmbaren Grössen den Werth Null und erhalten die Beziehung

$$\Sigma C'\overline{\Delta c} = \Sigma S'\overline{\Delta s},$$

und ebenso lässt sich ableiten:

$$\Sigma C''\overline{\Delta c} = \Sigma S''\overline{\Delta s}$$
$$\Sigma C'''\overline{\Delta c} = \Sigma S'''\overline{\Delta s}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---

*) $\overline{\Delta c}$ lässt sich stets als Längenänderung eines Auflagerstabes auffassen. Vergl. Seite 2.

Es können diese Gleichungen — mit Hinweis auf die Ausdrucksweise am Schlusse des § 1 — beziehungsweise als die Arbeitsgleichungen für die Zustände $X' = 1$, $X'' = 1$, $X''' = 1$ u. s. w. bezeichnet werden; ihre Anzahl stimmt mit derjenigen der Unbekannten X überein, und sie ermöglichen deshalb die Berechnung der Werthe X; man braucht sie nur auf die wirklichen elastischen Formänderungen des Fachwerks, welche nach einem durch die Erfahrung gegebenen Gesetze von den inneren und äusseren Kräften abhängen und mit Δc, Δs bezeichnet werden mögen, anzuwenden.

Es ergeben sich dann die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma C' \ \Delta c = \Sigma S' \ \Delta s \\ \Sigma C'' \ \Delta c = \Sigma S'' \ \Delta s \\ \Sigma C''' \Delta c = \Sigma S''' \Delta s \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (7)$$

Dieselben lassen sich auch mit Beachtung von

$$\frac{\partial C}{\partial X'} = C', \ \frac{\partial C}{\partial X''} = C'' \ \dots\dots, \frac{\partial S}{\partial X'} = S', \ \frac{\partial S}{\partial X''} = S''' \ \dots\dots$$

in der Form schreiben:

$$(8) \quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma \dfrac{\partial C}{\partial X'} \Delta c = \Sigma \dfrac{\partial S}{\partial X'} \Delta s \\ \Sigma \dfrac{\partial C}{\partial X''} \Delta c = \Sigma \dfrac{\partial S}{\partial X''} \Delta s \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots ; \end{array}\right.$$

in welcher sie sich unmittelbar ergeben, sobald die Gleichung 5 nach allen unabhängigen Veränderlichen X', X'' ..... theilweise differentiirt wird und hierbei die Verschiebungen δ, Δc, Δs, sowie die Lasten P als Konstanten betrachtet werden, was bei der Willkürlichkeit dieser Grössen gestattet ist. Schliesslich werden die virtuellen Formänderungen $\overline{\Delta s}$, $\overline{\Delta c}$ durch die wirklichen Δs, Δc ersetzt.

Für die den Zuständen $X' = 1$, $X'' = 1$, $X''' = 1$ . . . entsprechenden virtuellen Arbeiten

$$\Sigma C' \Delta c, \ \Sigma C'' \Delta c, \ \Sigma C''' \Delta c, \dots$$

der Auflagerkräfte werden wir häufig die kürzeren Bezeichnungen

$$L', \ L'', \ L''', \dots .$$

anwenden.

2. Die Verschiebungen Δs und Δc. Es werde vorausgesetzt, dass für den Stoff, aus dem das Fachwerk hergestellt ist, eine Proportionalitätsgrenze besteht und die Beanspruchung innerhalb dieser Grenze liegt, eine Annahme, welche bei den hier ausschliesslich in Betracht kommenden Tragwerken aus Schweisseisen, Flusseisen und Stahl

zulässig ist. Sodann wird angenommen, dass das Fachwerk bei einem bestimmten Temperaturzustande vor Einwirkung der Belastung spannungslos sei (Anfangszustand) und dass sich die Anfangstemperatur eines Stabes in allen Theilen desselben um den gleichen Betrag t ändere. Bedeutet dann:

E den Elasticitätsmodul des Stabmaterials,
F „ Inhalt des Stabquerschnittes,
ε „ Ausdehnungskoefficienten für $t = 1$,

so ist erfahrungsgemäss:

$$(9)\quad \Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s,$$

wobei, bezogen auf die Tonne und das Meter als Einheiten, und wenn t in Celsiusgraden ausgedrückt wird, durchschnittlich gesetzt werden darf:

für Schweisseisen	$E = 20\,000\,000$,	$\varepsilon = 0{,}000012$,	}	
„ Flusseisen	$E = 21\,500\,000$,	$\varepsilon = 0{,}000011$,	}	$\varepsilon E = 240$
„ Flussstahl	$E = 22\,000\,000$,	$\varepsilon = 0{,}000011$,	}	
„ Gusseisen	$E = 10\,000\,000$,	$\varepsilon = 0{,}000011$,		$\varepsilon E = 110$*)

Die Verschiebungen Δc der Stützpunkte hängen von der Form, der Elasticität, der Belastung und der Temperaturänderung der das Fachwerk stützenden Körper ab; sie lassen sich fast nie mit Sicherheit angeben und werden meistens gleich Null gesetzt oder geschätzt. Besitzen unbeabsichtigte Störungen der Stützlage einen grösseren Einfluss auf den Spannungszustand eines Fachwerks, so darf dieses nur bei sicherer Stützung ausgeführt werden. Beispielsweise sind kontinuirliche Balken und Bogenträger ohne Gelenke bei unsicherem Baugrunde zu verwerfen.

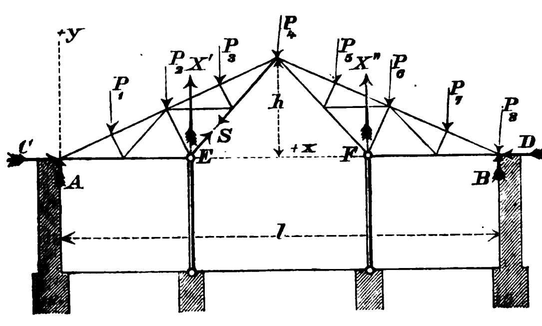


Fig. 22.

Im Falle starrer und reibungsloser Widerlager lauten die Bedingungsgleichungen, denen die statisch nicht bestimmbaren Grössen X zu genügen haben:

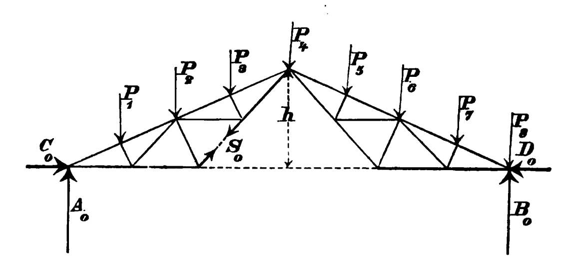
$$(10)\quad \Sigma S' \Delta s = 0;\ \Sigma S'' \Delta s = 0;\ \text{u. s. f.}$$

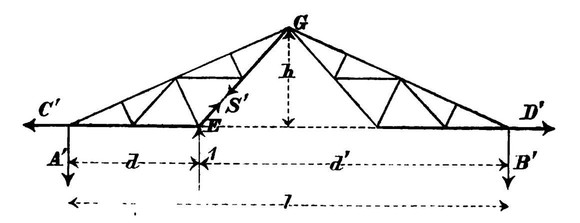
*) Gusseisen besitzt keinen konstanten Elasticitätsmodul, da das Proportionalitätsgesetz für diesen Stoff ungiltig ist. Der oben für E angegebene Werth ist also nur ein angenäherter Mittelwerth.

3. Beispiel zur Erläuterung der allgemeinen Theorie. Der in Fig. 22 dargestellte Dachbinder sei bei A und B fest gelagert und werde bei E und F durch Säulen gestützt, welche am Kopfe und am Fusse reibungslose Gelenke besitzen.

Alle Verschiebungon mögen auf das durch A und B gelegte feste Koordinatensystem (x, y) bezogen werden. Nachgeben der Widerlager verursache eine Vergrösserung der Stützweite l um Δl und Senkungen der Stützpunkte E und F um δ' bezieh. δ''. Die Lasten P seien beliebig gerichtet; die senkrechten Seitenkräfte der Stützendrücke an den Enden seien $= A$ und $= B$, die wagerechten $= C$ und $= D$; die Säulen üben die Gegendrücke X' und X'' aus.

Beseitigung der beiden Mittelstützen führt zu dem statisch bestimmten Hauptnetze, Fig. 23 (Bogen mit 3 Gelenken), dessen Auflagerkräfte A_0, B_0, C_0, D_0 und Stabkräfte S_0 sich leicht berechnen lassen. (Zeichnen eines Kräfteplanes oder Anwendung der Ritter'schen Methode).





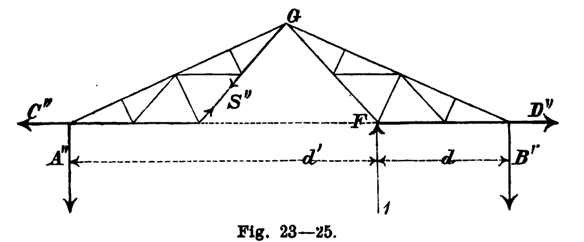


Fig. 23—25.

Werden alle Kräfte P und auch $X'' = 0$ gesetzt, während $X' = 1$ angenommen wird, so entsteht der in Fig. 24 dargestellte Belastungszustand mit den Auflagerkräften

$$A' = 1\,\frac{d'}{l},\quad B' = 1\,\frac{d}{l}\quad \text{und}\quad C' = D' = 1\,\frac{d}{2h}\,^{*)}$$

---

*) Folgt aus der Momentgleichung für Punkt G:

$$D'\,h = B'\,\frac{l}{2}.$$

und den leicht zu berechnenden Spannkräften S'; wir nennen ihn kurz: Zustand $X' = 1$. Verschwinden die Kräfte P und X', während $X'' = 1$ wird, so entsteht der Belastungszustand Fig. 25 (Zustand $X'' = 1$) mit den Auflagerkräften

$$A'' = 1\,\frac{d}{l},\ B'' = 1\,\frac{d'}{l},\ C'' = D'' = 1\,\frac{d}{2h}$$

und den Spannkräften S''.

Für das statisch unbestimmte Fachwerk in Fig. 22 ergiebt sich nun

$$\text{(I)}\quad \left\{\begin{aligned} A &= A_0 - A'X' - A''X'' = A_0 - \frac{d'}{l}X' - \frac{d}{l}X'', \\ B &= B_0 - \frac{d}{l}X' - \frac{d'}{l}X'', \\ C &= C_0 - \frac{d}{2h}X' - \frac{d}{2h}X'', \\ D &= D_0 - \frac{d}{2h}X' - \frac{d}{2h}X'' \text{ und} \\ S &= S_0 + S'X' + S''X''. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen zur Berechnung von X' und X'' werden durch Anschreiben der Arbeitsgleichungen für die Zustände $X' = 1$ und $X'' = 1$ erhalten. Im ersteren Belastungsfalle (Fig. 24) leistet die Auflagerkraft D' die virtuelle Arbeit $D' \cdot \Delta l = 1 \cdot \frac{d}{2h}\Delta l$ und die in E angreifende Kraft 1 leistet, da sich Punkt E um δ' senkt, die Arbeit $(-1 \cdot \delta')$; es ergiebt sich daher:

$$-1 \cdot \delta' + \frac{d}{2h}\Delta l = \Sigma S' \Delta s,$$

während für den Belastungsfall in Fig. 25 in derselben Weise die Gleichung

$$-1 \cdot \delta'' + \frac{d}{2h}\Delta l = \Sigma S'' \Delta s$$

gewonnen wird. Drückt man Δs nach Gleich. 8 aus, so folgt:

$$-\delta' + \frac{d}{2h}\Delta l = \Sigma S' \left(\frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s\right) \text{ und}$$

$$-\delta'' + \frac{d}{2h}\Delta l = \Sigma S'' \left(\frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s\right).$$

Wir wollen E, ε und t für sämmtliche Stäbe konstant annehmen und die vorstehenden Gleichungen mit einer beliebigen Querschnittsfläche F_c multipliciren. Drücken wir dann noch S nach der letzten der Gleich. I aus und setzen zur Abkürzung

$$s' = s\,\frac{F_c}{F},$$

so erhalten wir:

$$
\text{(II)} \left\{
\begin{aligned}
&EF_c\left(\frac{d}{2h}\,\Delta l - \delta'\right) - \varepsilon E t F_c \Sigma S' s \\
&\qquad = \Sigma S_0 S' s' + X' \Sigma S'^2 s' + X'' \Sigma S' S'' s', \\
&EF_c\left(\frac{d}{2h}\,\Delta l - \delta''\right) - \varepsilon E t F_c \Sigma S'' s \\
&\qquad = \Sigma S_0 S'' s' + X' \Sigma S' S'' s' + X'' \Sigma S''^2 s'.
\end{aligned}
\right.
$$

Die Multiplikation mit F_c ist zu empfehlen, sobald, was meistens der Fall sein wird, mehrere Stäbe des Fachwerks denselben Querschnitt erhalten; setzt man dann F_c gleich der am häufigsten vorkommenden Querschnittsfläche, so erhält man möglichst viele Verhältnisse $\frac{F_c}{F} = 1$. Stimmen für eine grössere Anzahl von Stäben sowohl Länge als Querschnitt überein, so kann man F_c so annehmen, dass $s' = s\,\frac{F_c}{F}$ durch eine runde Zahl ausgedrückt wird.

Sollen nun die Gleichungen II für einen bestimmten Fall der Anwendung aufgelöst werden, so müssen gewisse Voraussetzungen über die Grösse der Verschiebungen δ', δ'' und Δl gemacht werden. Lehnt sich der Dachstuhl bei A und bei B gegen gemauerte Widerlager, so wird in der Regel $\Delta l = 0$ angenommen. Weiter wird meistens die Zusammendrückung des Baugrundes und der Säulen-Fundamente (weil schwer anzugeben) vernachlässigt, so dass δ' und δ'' gleich sind den Verkürzungen der Säulen in Folge der Drücke X' und X'', vermindert um die Verlängerungen derselben in Folge einer Erhöhung der Temperatur. Ist also

E_0 = Elasicitätsmodul des Säulenmateriales,
ε_0 = Ausdehnungskoefficient für $t = 1^0$,
F_0 = Inhalt des Säulenquerschnittes,
s_0 = Länge einer Säule,

so ergiebt sich

$$\delta' = \frac{X' s_0}{E_0 F_0} - \varepsilon_0 t s_0 \quad \text{und} \quad \delta'' = \frac{X'' s_0}{E_0 F_0} - \varepsilon_0 t s_0,$$

und es gehen die Gleichungen II über in

$$
\begin{aligned}
F_c t\,[\varepsilon_0 E s_0 - \varepsilon E \Sigma S' s] &= \Sigma S_0 S' s' + X' \left[\frac{E F_c}{E_0 F_0}\, s_0 + \Sigma S'^2 s'\right] \\
&\quad + X'' \Sigma S' S'' s' \\
F_c t\,[\varepsilon_0 E s_0 - \varepsilon E \Sigma S'' s] &= \Sigma S_0 S'' s' + X'' \left[\frac{E F_c}{E_0 F_0}\, s_0 + \Sigma S''^2 s'\right] \\
&\quad + X' \Sigma S' S'' s';
\end{aligned}
$$

sie enthalten jetzt nur noch die Unbekannten X' und X''.

Die Durchführung der Rechnung in Zahlen erfordert natürlich, dass alle Querschnittsinhalte (deren Bestimmung in der Regel das Ziel einer statischen Berechnung ist) bekannt sind; es müssen also diese Inhalte, sobald es sich um ein neu zu entwerfendes Fachwerk handelt, zunächst abgeschätzt oder mit Hilfe von angenäherten Rechnungsmethoden ermittelt werden.

4. Zahlenbeispiel. Es ist der Horizontalschub X des in Fig. 26 dargestellten, bei A und B fest gelagerten Bogenträgers zu berechnen. Stützweite 20 m, Feldweite 2 m. Die unteren Knotenpunkte liegen auf einer Parabel, deren Pfeil = 2,5 m ist; die obere Gurtung ist geradlinig; Höhe der Endvertikale = 3 m. Die Knotenpunktslasten sind = 1 t bezieh. 0,5 t. Die in Fig. 26 an die Stäbe gesetzten Zahlen geben, links von der Mitte, die Stablängen in cm und, rechts von der Mitte, die Inhalte der Querschnitte in qcm an.

Im Falle $X = 0$ entsteht ein statisch bestimmter Fachwerkbalken, dessen Spannkräfte S_0 mit Hilfe eines Kräfteplanes ermittelt und in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt wurden. Sodann sind in Fig. 27 diejenigen Stabkräfte S' eingetragen worden, welche thätig sind, sobald in A und B zwei auswärts gerichtete, wagerechte Kräfte 1 auf das im übrigen unbelastet und gewichtslos gedachte Fachwerk wirken. Aus den Werthen S_0 und S' ergeben sich die Spannkräfte: (I) $S = S_0 - S'X$. Um X zu berechnen, schreiben wir die Arbeitsgleichung für den Belastungszustand in Fig. 27 an; sie lautet, wenn sich l um Δl vergrössert:

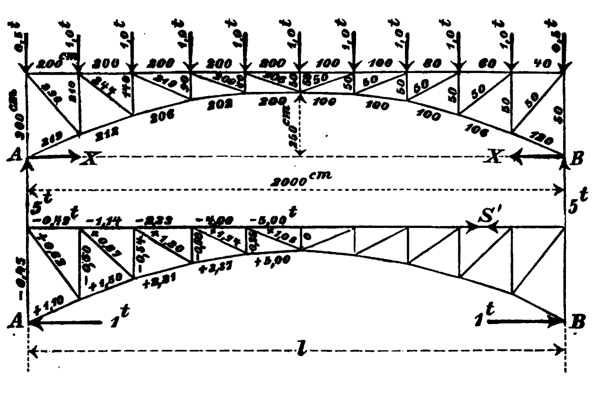


Fig. 26 u. 27.

$$\text{(II)} \quad 1 \cdot \Delta l = \Sigma S' \Delta s$$

und geht mit

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s$$

über in

$$\text{(III)} \quad \Delta l = \Sigma \frac{SS's}{EF} + \Sigma \varepsilon t S's.$$

Werden E und ε für alle Stäbe gleich gross angenommen, und wird die vorstehende Gleichung mit der beliebigen Querschnittsfläche F_c multiplicirt, so geht sie, mit der Abkürzung

$$s' = s\frac{F_c}{F},$$

über in

$$EF_c\Delta l = \Sigma S' \left(S_0 - S'X\right) s' + \varepsilon EF_c \Sigma t S' s$$

und liefert

$$\text{(IV)} \quad X = \frac{\Sigma S' S_0 s' + \varepsilon EF_c \Sigma t S s - EF_c \Delta l}{\Sigma S'^2 s'}.$$

Die Belastung erzeugt für sich allein

$$\text{(V)} \quad X = \frac{\Sigma S' S_0 s'}{\Sigma S'^2 s'}.$$

In der folgenden Tabelle sind die den einzelnen Stäben entsprechenden Werthe $S' S_0 s'$ und $S'^2 s'$, bei deren Berechnung $F_c = 100$ qcm angenommen wurde, zusammengestellt worden. Es ergiebt sich für die eine Hälfte des in Bezug auf die Mitte symmetrischen Trägers

$$\Sigma S' S_0 s' = 1982{,}78, \quad \Sigma S'^2 s' = 224{,}50,$$

mithin ist

$$X = \frac{1982{,}78}{224{,}50} = 8{,}8 \text{ t und}$$

$$S = S_0 - 8{,}8 S'$$

also beispielsweise für die erste Diagonale

$$S = 6{,}22 - 8{,}8 \cdot 0{,}62 = 0{,}76 \text{ t}.$$

Werden die Knotenpunktslasten 1 t und 0,5 t beziehungsweise durch P und 0,5 P ersetzt, so entsteht $X = 8{,}8\,P$ und dieser Werth bleibt giltig, wenn man sämmtliche Querschnittsflächen mit ein und derselben Zahl multiplicirt, so dass es bei der Berechnung des durch die Belastung erzeugten Horizontalschubes H eines zu entwerfenden Fachwerkbogens nur darauf ankommt, das gegenseitige Verhältniss der Querschnittsflächen abzuschätzen.

Der durch eine Erhöhung der Temperatur hervorgerufene Horizontalschub möge unter der Voraussetzung eines konstanten t berechnet werden; er ergiebt sich nach Gleichung IV:

$$X = \frac{\varepsilon EF_c t \Sigma S' s}{\Sigma S'^2 s'}$$

und, wenn für Schmiedeeisen $\varepsilon E = 240$ (bezogen auf die Tonne und das

Meter) gesetzt und $t = 40^0$ Cels. angenommen wird, mit $F_o = 100$ qcm $= 0{,}01$ qm,

$$X = \frac{240 \cdot 0{,}01 \cdot 49 \, \Sigma S' s}{2 \cdot 224{,}50} = 0{,}214 \, \Sigma S' s.$$

	s	F	$s' = s \frac{F_o}{F}$	S'	$S'^2 s'$	S_0	$S_0 S' s'$
Obere Gurtung	2,00	40	5,00	— 0,43	0,92	— 4,29	9,22
	2,00	60	3,34	— 1,14	4,36	— 11,43	43,39
	2,00	80	2,50	— 2,33	13,57	— 23,33	135,90
	2,00	100	2,00	— 4,00	32,00	— 40,00	320,00
	2,00	100	2,00	— 5,00	50,00	— 50,00	500,00
Untere Gurtung	2,19	120	1,83	+ 1,10	2,21	0	0
	2,12	106	2,00	+ 1,50	4,50	+ 4,54	13,62
	2,06	100	2,06	+ 2,21	10,06	+ 11,77	53,58
	2,02	100	2,02	+ 3,37	22,94	+ 23,57	160,45
	2,00	100	2,00	+ 5,00	50,00	+ 40,05	400,50
Diagonalen	2,90	50	5,80	+ 0,62	2,23	+ 6,22	22,37
	2,44	50	4,88	+ 0,87	3,69	+ 8,71	36,98
	2,19	50	4,38	+ 1,30	7,40	+ 13,03	74,19
	2,09	50	4,18	+ 1,74	12,66	+ 17,42	126,70
	2,06	50	4,12	+ 1,03	4,37	+ 10,30	43,71
Vertikalen	3,00	50	6,00	— 0,45	1,22	— 5,00	13,50
	2,10	50	4,20	— 0,50	1,05	— 6,00	12,60
	1,40	50	2,80	— 0,54	0,82	— 6,36	9,62
	0,90	50	1,80	— 0,50	0,45	— 6,00	5,40
	0,60	50	1,20	— 0,25	0,08	— 3.50	1,05
	m	qcm	m	$\Sigma S'^2 s' = 224{,}50$		$\Sigma S_0 S' s' = 1982{,}78$	

Um den Werth $\Sigma S' s$, welcher sich über den ganzen Träger erstreckt, schnell zu berechnen, beachte man, dass in der Arbeitsgleichung II unter Δl und Δs beliebige, aber mögliche und genügend kleine Verschiebungen verstanden werden dürfen. Solche mögliche Verschiebungen entstehen unter Anderem, wenn das Fachwerk eine der früheren Form ähnliche Form annimmt, wenn sich also s um ωs und l um ωl ändert, unter ω eine Konstante verstanden. Gleichung II geht dann über in

$$\omega l = \omega \Sigma S' s;$$

sie liefert

$$\Sigma S's = l,$$

und es folgt somit:

$$X = 0{,}214 \cdot 20 = 4{,}3 \text{ t}.$$

Eine durch Nachgeben der Widerlager entstandene Vergrösserung der Stützweite um Δl bedingt nach Gleich. IV den Horizontalschub

$$X = -\frac{EF_c \Delta l}{\Sigma S'^2 s} = -\frac{20\,000\,000 \cdot 0{,}01}{2 \cdot 224{,}5} \Delta l$$

und beispielsweise für $\Delta l = 1 \text{ cm} = 0{,}01 \text{ m}$:

$$X = -4{,}5 \text{ t}.$$

§ 4.

Verschiebungen der Knotenpunkte eines Fachwerks. Allgemeine Untersuchungen.

Werden die Knotenpunkte des Fachwerks mit 1, 2, 3 . . . m . . . . n bezeichnet und die in denselben angreifenden Lasten mit P_1, P_2, P_3, . . . P_m. . . . P_n, so lautet die in § 3 aufgestelte Arbeitsgleichung (4):

$$(11)\quad P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + P_3\delta_3 + \ldots + P_m\delta_m + \ldots . P_n\delta_n + \Sigma C\Delta c = \Sigma S\Delta s;$$

sie gilt für beliebige mögliche Verschiebungen δ, Δc und Δs und für beliebige Werthe der Lasten P und liefert unmittelbar die durch bestimmte Δc und Δs hervorgerufene Verschiebung δ_m des Knotenpunktes m im Sinne von P_m, sobald P_1 bis P_{m-1} und P_{m+1} bis P_n gleich Null gesetzt werden, während $P_m = 1$ angenommen wird. Da nun aber die Gleichung 10 bei statisch unbestimmten Fachwerken auch für beliebige Werthe der statisch nicht bestimmbaren Grössen X giltig ist, so wird es sich empfehlen, sämmtliche X gleich Null zu setzen, d. h.

> *man wird, um die durch irgend einen, kurz mit* L *bezeichneten Belastungszustand erzeugte Verschiebung* δ_m *zu berechnen, die Arbeitsgleichung für das durch* $P_m = 1$ *belastete, statisch bestimmte Hauptnetz anschreiben und in diese Gleichung die dem Belastungszustande* L *entsprechenden Verschiebungen* Δc *und* Δs *einsetzen.*

Hierbei ist es ganz gleichgiltig, in welcher Weise das statisch bestimmte Hauptnetz gebildet wird. Dass dies auf verschiedenartige Weise geschehen kann, geht daraus hervor, dass bei der Auswahl der als statisch nicht bestimmbar aufzufassenden Grössen — innerhalb gewisser Grenzen — nach Willkür verfahren werden darf.

Auch ist hervorzuheben, dass bei der Berechnung der Knotenpunktsverschiebungen δ andere Hauptnetze gebildet werden dürfen, wie bei der Berechnung der Spannkräfte.

Zahlenbeispiel. Es wird die Senkung δ_3 des Knotenpunktes 3 des in Fig. 28 dargestellten, statisch bestimmten Fachwerkträgers gesucht. Die Knotenpunktlasten sind 8 t und 4 t. Stützweite = 12 m, Trägerhöhe = 4 m, Feldweite = 3 m, Länge einer Diagonale = 5 m. In Fig. 28 sind die Spannkräfte S zusammengestellt worden; die ihnen entsprechenden Aenderungen der Stablängen sind, wenn die Anfangstemperatur erhalten bleibt,

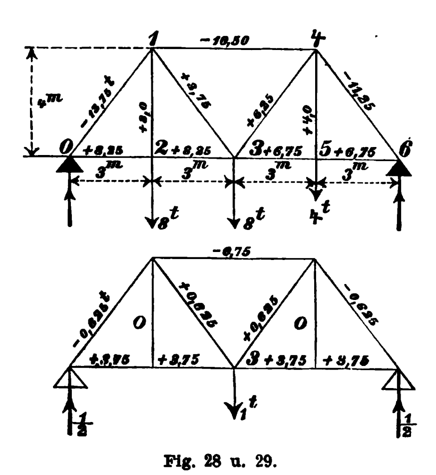


Fig. 28 u. 29.

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF}.$$

Fig. 29 giebt diejenigen Spannkräfte $\mathfrak{S}$, welche entstehen, sobald im Knotenpunkte 3 nach der Richtung der gesuchten Verschiebung (d. i. also im vorliegenden Falle senkrecht) eine Last 1 angreift. Die Arbeitsgleichung lautet für diesen Belastungszustand

$$1 \cdot \delta_3 = \Sigma \mathfrak{S} \cdot \Delta s,$$

sie gilt für beliebige zusammengehörige Werthe δ_3 und Δs, und liefert insbesondere die dem Belastungsfalle in Fig. 28 entsprechende Senkung δ_3, sobald die für diesen Belastungsfall berechneten Δs eingesetzt werden. Bei konstantem E folgt:

$$\delta_3 = \Sigma \frac{\mathfrak{S} Ss}{EF} = \frac{1}{E} \Sigma \frac{\mathfrak{S} Ss}{F}.$$

Die den einzelnen Stäben entsprechenden Produkte $\frac{\mathfrak{S} Ss}{F}$ sind in der Tabelle auf Seite 27 zusammengestellt worden. Man findet

$$\Sigma \frac{\mathfrak{S} Ss}{F} = 822$$

und, wenn für Schmiedeeisen $E = 2000$ t für das qcm gesetzt wird,

$$\delta = \frac{822}{2000} = 0,4 \text{ cm}.$$

Beispiel 2. Es soll die Senkung δ des Scheitels G des in Fig. 22 auf Seite 18 dargestellten Dachbinders ermittelt werden.

Nachdem die statisch nicht bestimmbaren Grössen X' und X'' nach der im § 3 gegebenen Anleitung berechnet und die Spannkräfte $S = S_0 + S'X' + S''X''$ ermittelt worden sind, werden die wirklichen Längen-

Tabelle zum Zahlenbeispiele auf Seite 00.

Stab	S	s	F	$\mathfrak{S}$	$\frac{\mathfrak{S} S s}{F}$
0 — 1	— 13,75	500	30	— 0,625	143
0 — 2	+ 8,25	300	15	+ 0,375	62
1 — 2	+ 8,00	400	10	0	0
1 — 4	— 10,50	600	20	— 0,750	24
1 — 3	+ 3,75	500	10	+ 0,625	117
2 — 3	+ 8,25	300	15	+ 0,375	62
3 — 4	+ 6,25	500	10	+ 0,625	195
3 — 5	+ 6,75	300	15	+ 0,375	51
4 — 5	+ 4,00	400	10	+ 0	0
4 — 6	— 11,25	500	30	— 0,625	117
5 — 6	+ 6,75	300	15	+ 0,375	51
	Tonnen	*cm*	*qcm*	Tonnen	$\Sigma \frac{\mathfrak{S} S s}{F} = 822$

änderungen $\Delta s = \frac{S s}{E F} + \varepsilon t s$ für sämmtliche Stäbe, sowie etwaige Verschiebungen der Stützpunkte festgestellt.

Hierauf wird das statisch bestimmte Hauptnetz (Fig. 30) mit der

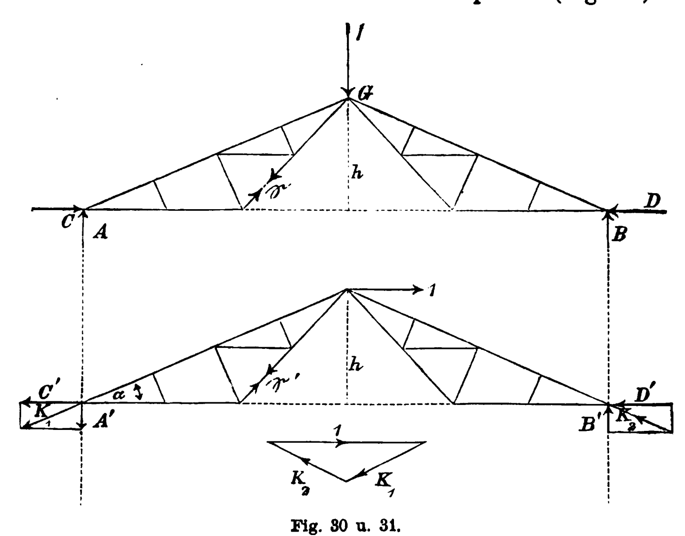


Fig. 30 u. 31.

in G angreifenden Kraft 1 belastet. Es entstehen die Auflagerkräfte

$$A = B = \frac{1}{2} \text{ und } C = D = 1 \cdot \frac{l}{2h},$$

sowie gewisse, leicht bestimmbare Spannkräfte $\mathfrak{S}$, und es lautet die Arbeitsgleichung

$$1 \cdot \delta - 1 \cdot \frac{l}{2h} \Delta l = \Sigma \mathfrak{S} \Delta s,$$

sie gilt für beliebige zusammengehörige δ und Δs. Setzt man also die wirklichen (dem Belastungszustande in Fig. 22 entsprechenden) Formänderungen Δl und Δs ein, so erhält man auch die wirkliche Senkung δ.

Wird die wagerechte Verschiebung δ' des Punktes G gesucht und hierbei δ' positiv angenommen, sobald sich G nach rechts verschiebt, so ist das statisch bestimmte Hauptnetz mit einer nach rechts gerichteten Kraft 1 zu belasten (Fig. 31). Diese erzeugt die Auflagerkräfte

$$A' = 1 \cdot \frac{h}{l}, \text{ abwärts gerichtet*)},$$

$$B' = 1 \cdot \frac{h}{l}, \text{ aufwärts gerichtet},$$

$$C' = D' = \frac{1}{2},$$

sowie Spannkräfte $\mathfrak{S}'$, und es ergiebt sich die Arbeitsgleichung

$$1 \,.\, \delta' - D' \cdot \Delta l = \Sigma \mathfrak{S}' \Delta s, \text{ aus welcher}$$

$$\delta' = \frac{1}{2} \Delta l + \Sigma \mathfrak{S}' \Delta s$$

erhalten wird.

Beispiel 3. Gesucht sei die Senkung δ_m des Knotenpunktes m der Mittelöffnung eines kontinuirlichen Fachwerkträgers mit 4 Stützpunkten (Fig. 32).

Nachdem für den vorgeschriebenen Belastungsfall die Spannkräfte S ermittelt worden sind, wird der Theil des Fachwerks, welchem der Knotenpunkt m angehört, statisch bestimmt gemacht. Dies geschieht am zweckmässigsten durch Beseitigung der beiden Stäbe LN und RT. Der Trägertheil $C_1 C_2$ ist jetzt als ein einfacher Balken aufzufassen (Fig. 32); er wird im Punkte m mit der senkrechten Kraft 1 belastet, und hierauf werden die Auflagerkräfte $1 \frac{b}{l}$ und $1 \frac{a}{l}$ und die Spannkräfte $\mathfrak{S}$ berechnet. Schliesslich wird die Arbeitsgleichung

$$1 \cdot \delta_m = \Sigma \mathfrak{S} \Delta s$$

angeschrieben; sie liefert, wenn für Δs die wirklichen Aenderungen

*) Es ist B' gleich aber entgegengesetzt A', damit die senkrechten Kräfte im Gleichgewichte sind. Sodann verlangt das Gleichgewicht gegen Drehen: $A' l = 1 \,.\, h$, woraus $A' = 1 \frac{h}{l}$. Schliesslich folgt $C' = A' \cos \alpha = \frac{h}{l} \cdot \frac{l}{2h} = \frac{1}{2}$ und ebenso $D' = \frac{1}{2}$, weil die Mittelkraft K_1 aus A' und C', desgl. K_2 aus B' und D' durch den Punkt G gehen muss.

der Stablängen gesetzt werden, die **wirkliche** senkrechte Verschiebung des Punktes m gegen die fest gedachte Gerade $C_1 C_2$. Senken sich die

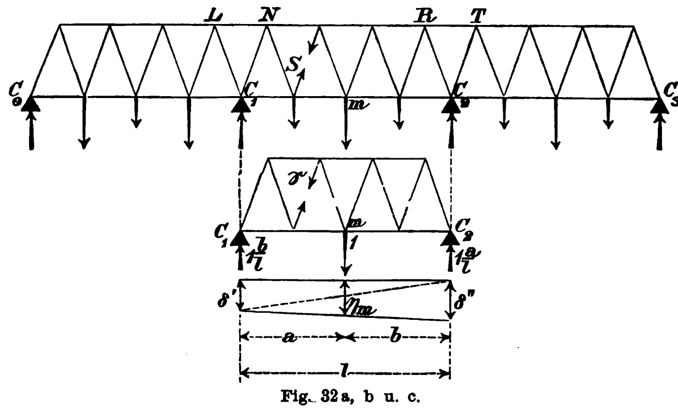


Fig. 32 a, b u. c.

Stützpunkte C_1 und C_2 beziehungsweise um δ' und δ'', so ist zu δ_m noch der durch die Fig. 32 nachgewiesene Betrag

$$\eta_m = \delta' \frac{b}{l} + \delta'' \frac{a}{l}$$

hinzuzufügen.

§ 5.

Die Biegungspolygone für ebene Fachwerkträger.

1) Trägt man die (nach unten positiv gezählten) senkrechten Verschiebungen .... δ_{m-1}, δ_m, δ_{m+1} ...... der Knotenpunkte .... $m - 1$, m, $m + 1$ ..... einer Gurtung AB eines in einer lothrechten Ebene gedachten Fachwerks von einer wagerechten $A' B'$ aus als Ordinaten auf und verbindet die Endpunkte derselben durch gerade Linien, so erhält man das der gegebenen Belastung entsprechende **Biegungspolygon** der Gurtung AB (Fig. 33b). Dasselbe lässt sich bestimmen, sobald die Längenänderungen der Gurtstäbe und die Aenderungen der von je zwei aufeinander folgenden Gurtstäben gebildeten Winkel, welche wir kurz die **Randwinkel** nennen und $= \vartheta$ setzen wollen, bekannt sind.

Die Fläche zwischen dem Biegungspolygone und der zugehörigen Abscissenachse möge die **Biegungsfläche** der Gurtung heissen.

Wir betrachten zuerst das

Biegungspolygon einer unteren Gurtung, bezeichnen

mit s_m und s_{m+1} die Längen der einem Knotenpunkte m benachbarten Gurtstäbe,

„ γ_m und γ_{m+1} die von der Wagerechten durch das linke Stabende aus nach unten positiv gezählten Neigungswinkel dieser Stäbe,

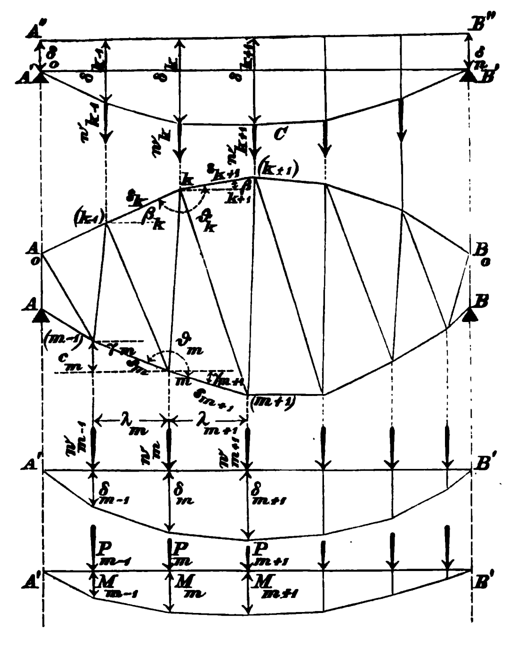


Fig. 33 a, b, c.

mit c_m und c_{m+1} die senkrechten Projektionen von s_m und s_{m+1},

„ λ_m und λ_{m+1} die wagerechten Projektionen von s_m und s_{m+1},

„ Δs, $\Delta\gamma$, Δc, $\Delta\lambda$ die Aenderungen von s, γ, c und λ, und erhalten

$$\delta_m - \delta_{m-1} = \Delta c_m,$$
$$\delta_{m+1} - \delta_m = \Delta c_{m+1}.$$

Wird die Gleichung

$$c_m = s_m \sin\gamma_m$$

differentiirt und hierbei das Differentialzeichen d durch das Zeichen Δ ersetzt, so folgt:

$$\Delta c_m = \Delta s_m \sin\gamma_m + s_m \cos\gamma_m \Delta\gamma_m$$

und nach Division durch $\lambda_m = s_m \cos\gamma_m$:

$$\frac{\Delta c_m}{\lambda_m} = \frac{\Delta s_m}{s_m}\, tg\gamma_m + \Delta\gamma_m$$

und ebenso ergiebt sich

$$\frac{\Delta c_{m+1}}{\lambda_{m+1}} = \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}}\, tg\gamma_{m+1} + \Delta\gamma_{m+1},$$

so dass

$$\frac{\Delta c_m}{\lambda_m} - \frac{\Delta c_{m+1}}{\lambda_{m+1}} = \frac{\Delta s_m}{s_m}\, tg\gamma_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}}\, tg\gamma_{m+1} + \Delta\gamma_m - \Delta\gamma_{m+1}$$

wird.

Nun ist aber

$$\vartheta_m + \gamma_m - \gamma_{m+1} = 180^0, \text{ mithin } \Delta\vartheta_m + \Delta\gamma_m - \Delta\gamma_{m+1} = 0,$$

und es entsteht, wenn die Δc durch die δ ausgedrückt werden:

$$\frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{\lambda_{m+1}} = \frac{\Delta s_m}{s_m}\, tg\gamma_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}}\, tg\gamma_{m+1} - \Delta\vartheta_m.$$

Bezeichnet man zunächst für den Temperaturzustand $t = 0$, mit

$$\sigma_m = \frac{S_m}{F_m} = \frac{\Delta s_m}{s_m} E \text{ und } \sigma_{m+1} = \frac{S_{m+1}}{F_{m+1}} = \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} E$$

die Spannungen in den Gurtstäben s_m und s_{m+1} und setzt zur Abkürzung

$$(12)\quad w_m = \frac{\sigma_m}{E}\, tg\gamma_m - \frac{\sigma_{m+1}}{E}\, tg\gamma_{m+1} - \Delta\vartheta_m,$$

so folgt die Gleichung

$$(13)\qquad \frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{\lambda_{m+1}} = w_m,$$

welche eine einfache Deutung zulässt.

Wird ein Balken $A' B'$ (Fig. 33c) durch senkrechte Lasten ..... P_{m-1}, P_m, P_{m+1} ....., welche in Abständen .... λ_m, λ_{m+1} .... wirken, beansprucht, so besteht zwischen den Querkräften Q_m und Q_{m+1} welche beziehungsweise innerhalb der Strecken λ_m und λ_{m+1} konstant sind, die Beziehung

$$Q_m - Q_{m+1} = P_m.$$

Bedeuten nun .... M_{m-1}, M_m, M_{m+1} .... die Biegungsmomente für die durch die Angriffspunkte der Lasten ..... P_{m-1}, P_m, P_{m+1} .... gelegten Balkenquerschnitte, so ist

$$Q_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda_m} \text{ und } Q_{m+1} = \frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda_{m+1}},$$

und es folgt:

$$\frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda_{m+1}} = P_m.\text{*)}$$

Vergleicht man diese Beziehung mit der Gleichung (12), so ist ersichtlich, dass man das Biegungspolygon einer Fachwerksgurtung auffassen darf als das Momentenpolygon eines Balkens $A'B'$, welcher durch Lasten ... w_{m-1}, w_m, w_{m+1} ..... beansprucht wird (Fig. 33b).

Sind insbesondere die Verschiebungen des ersten und des letzten Knotenpunktes (o und n) der Gurtung gleich Null, wie dies in der Fig. 33b vorausgesetzt worden ist, so ist der Balken $A'B'$ ein einfacher, d. h. an den Enden frei aufliegender.

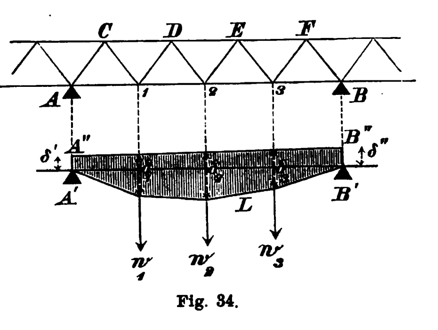


Fig. 34.

Handelt es sich nm das Biegungspolygon einer Gurtung AB, deren Endknotenpunkte sich um Strecken δ' und δ'' senken (beispielsweise der Gurtung des Mittelfeldes eines kontinuirlichen Trägers mit verschieblichen Stützpunkten, Fig. 34), so setze man zuerst δ' und δ'' gleich Null, berechne

---

*) Die Querkraft Q ist hierbei als Mittelkraft der auf das Balkenstück links vom betrachteten Querschnitte wirksamen äusseren Kräfte aufgefasst und positiv angenommen, wenn aufwärts gerichtet. M bedeutet das Moment von Q, bezogen auf den Schwerpunkt des betrachteten Querschnitts als Drehpunkt, und wird positiv gesetzt, wenn es rechts drehend ist.

also das den Lasten w entsprechende Momentenpolygon $A'LB'$ eines einfachen Balkens $A'B'$ und füge schliesslich zu den Ordinaten dieses Polygons die Ordinaten der Geraden $A''B''$, welche durch $A'A'' = \delta'$ und $B'B'' = \delta''$ gegeben ist. Die in der Fig. 34 schraffirte Fläche ist die gesuchte Biegungsfläche. Für das

Biegungspolygon einer oberen Gurtung ergiebt sich, wenn

β_k und β_{k+1} die von der Wagerechten durch das linke Stabende aus nach oben positiv gezählten Neigungswinkel der Gurtstäbe s_k und s_{k+1}

bedeuten (Fig. 33a), in gleicher Weise

$$\frac{\delta_k - \delta_{k-1}}{\lambda_k} - \frac{\delta_{k+1} - \delta_k}{\lambda_{k+1}} = w_k,$$

wobei

$$(14) \quad w_k = \frac{\sigma_{k+1}}{E} tg\beta_{k+1} - \frac{\sigma_k}{E} tg\beta_k + \Delta\vartheta_k$$

ist. Der durch die Lasten w_k beanspruchte Balken $A'B'$, dessen Momentenpolygon mit dem gesuchten Biegungspolygone übereinstimmt, ist, wie vorhin, als ein an den Enden frei aufliegender anzusehen, sobald der erste und der letzte Knotenpunkt der betrachteten Gurtung keine senkrechten Verschiebungen erfahren. Handelt es sich nun beispielsweise um die obere Gurtung eines Fachwerkträgers mit Endvertikalen (Fig. 33d), so hat man nach Aufzeichnung des Momentenpolygons $A'CB'$ für den an den Enden freiliegenden Balken $A'B'$, zu den Ordinaten dieses Polygons noch die der Geraden $A''B''$ zu addiren, wobei die Strecken $\overline{A'A''}$ und $\overline{B'B''}$ gleich den Verkürzungen δ_0 bezieh. δ_n der Endvertikalen zu machen sind.

Will man die Senkungen der Knotenpunkte C, D, E, F der oberen Gurtung einer Mittelöffnung eines kontinuirlichen Balkens bestimmen (Fig. 34), so betrachte man das Polygon $ACDEFB$ als obere Gurtung und die Stützpunkte A und B, deren Verschiebungen stets gegeben sind, beziehungsweise als Anfangs- und Endknotenpunkt.

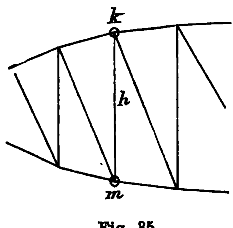


Fig. 35.

Bei einem Fachwerke mit Vertikalen (Fig. 35) findet man nach Bestimmung des Biegungspolygones der unteren Gurtung dasjenige der oberen (oder umgekehrt) mit Hilfe der Beziehung

$$\delta_m - \delta_k = \Delta h,$$

wobei δ_m = Senkung des unteren Knotenpunktes m,
δ_k = Senkung des oberen Knotenpunktes k,
Δh = Verlängerung der die beiden Punkte m und k verbindenden Vertikale.

Berechnung der $\Delta\vartheta_m$. Wir beschränken uns in diesem Buche auf die Behandlung des Falles, in welchem das Fachwerk durch Aneinanderfügung von Dreiecken entstanden gedacht werden kann. Es setzt sich dann jeder Winkel ϑ aus einzelnen Dreieckswinkeln zusammen, und es genügt, die Berechnung der Aenderung eines solchen zu zeigen.

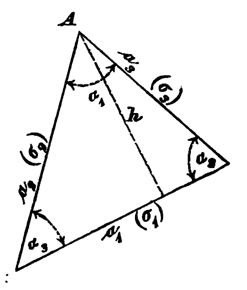


Fig. 36.

Sind a_1, a_2, a_3 die Seiten eines Dreiecks und α_1, α_2, α_3 die ihnen gegenüberliegenden Winkel, und bedeutet h das Loth von A auf a_1, so folgt:

$$a_1 = a_2 \cos\alpha_3 + a_3 \cos\alpha_2$$

und hieraus durch Differentiiren:

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 \cos\alpha_3 - a_2 \sin\alpha_3 \Delta\alpha_3 + \Delta a_3 \cos\alpha_2 - a_3 \sin\alpha_2 \Delta\alpha_2$$
$$= \frac{\Delta a_2}{a_2} \cdot a_2 \cos\alpha_3 + \frac{\Delta a_3}{a_3} \cdot a_3 \cos\alpha_2 - h(\Delta\alpha_2 + \Delta\alpha_3).$$

Nun ist aber $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^0$ also $\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 + \Delta\alpha_3 = 0$ und $\Delta\alpha_2 + \Delta\alpha_3 = -\Delta\alpha_1$, ferner ist $a_2 \cos\alpha_3 = h \operatorname{cotg}\alpha_3$ und $a_3 \cos\alpha_2 = h \operatorname{cotg}\alpha_2$, weshalb sich ergiebt:

$$\Delta\alpha_1 = \frac{\Delta a_1}{a_1} \cdot \frac{a_1}{h} - \frac{\Delta a_2}{a_2} \operatorname{cotg}\alpha_3 - \frac{\Delta a_3}{a_3} \operatorname{cotg}\alpha_2.$$

Bezeichnet man mit σ_1, σ_2, σ_3 die Spannungen in den Stäben a_1, a_2, a_3 und setzt die Temperaturänderung $t = 0$ voraus, so ist

$$\frac{\Delta a_1}{a_1} = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \frac{\Delta a_2}{a_2} = \frac{\sigma_2}{E},$$
$$\frac{\Delta a_3}{a_3} = \frac{\sigma_3}{E}.$$

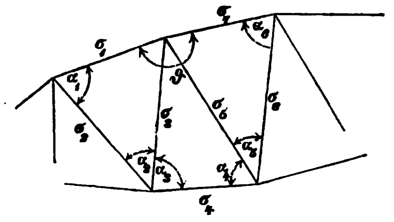


Fig. 37.

Beachtet man noch

$$\frac{a_1}{h} = \operatorname{cotg}\alpha_2 + \operatorname{cotg}\alpha_3,$$

so findet man, wenn E konstant ist, zur Berechnung der durch die Spannungen σ hervorgebrachten Winkeländerung die Gleichung

$$(15) \quad E\Delta\alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{cotg}\alpha_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \operatorname{cotg}\alpha_2.$$

Für die Aenderung des Winkels ϑ in Fig. 37 ergiebt sich z. B. mit den an die einzelnen Stäbe geschriebenen Spannungen σ die Gleichung:

$$(15\text{a}) \quad E\Delta\vartheta = (\sigma_2 - \sigma_1) \operatorname{cotg}\alpha_1 + (\sigma_2 - \sigma_3) \operatorname{cotg}\alpha_2 + (\sigma_4 - \sigma_3) \operatorname{cotg}\alpha_3$$
$$+ (\sigma_4 - \sigma_5) \operatorname{cotg}\alpha_4 + (\sigma_6 - \sigma_5) \operatorname{cotg}\alpha_5 + (\sigma_6 - \sigma_7) \operatorname{cotg}\alpha_6.$$

Sollen **Temperaturänderungen** berücksichtigt werden, so ergiebt sich die Aenderung Δs einer Stablänge s aus

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{S}{FE} + \varepsilon t = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t = \frac{1}{E}(\sigma - \varepsilon E t);$$

es treten alsdann in den Gleichungen (12) bis (16) an die Stelle der Spannungen σ die Werte $\sigma + \varepsilon E t$.

Zahlenbeispiel. Es soll das Biegungspolygon für die untere Gurtung des in Fig. 38 dargestellten Schwedler-Trägers berechnet

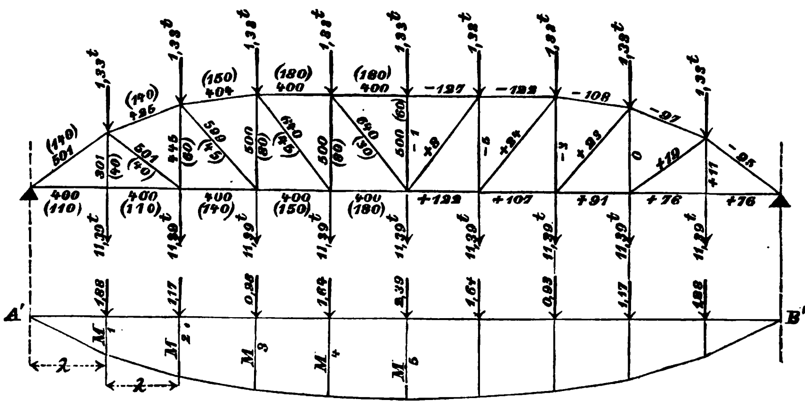


Fig. 38.

werden. Material: Schmiedeeisen. Jeder untere Knotenpunkt ist mit 11,39 t, jeder obere mit 1,33 t belastet. In Fig. 38 geben links von der Mitte die nicht eingeklammerten Zahlen die Stablängen in cm an und die eingeklammerten Zahlen die Querschnittsinhalte F in qcm; die Zahlen rechts von der Mitte sind gleich den Spannkräften in Tonnen.

In Figur 39 bedeuten die an die Stäbe geschriebenen Zahlen die

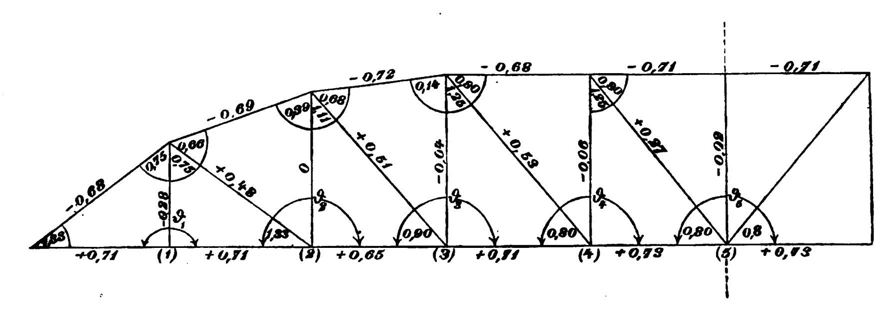


Fig. 39.

in Tonnen für das qcm ausgedrückten Spannungen; die in die Winkel gesetzten Zahlen sind gleich den Cotangenten der Winkel.

Es ergeben sich folgende Werte für die den unteren Randwinkeln entsprechenden Produkte $E \Delta \vartheta_m$:

$$E \Delta \vartheta_1 = (-0,68 - 0,71)\, 1,33 + (-0,68 + 0,28)\, 0,75 + (0,48 + 0,28)\, 0,75 + (0,48 - 0,71)\, 1,33 = -1,88$$

$E\Delta\mathfrak{J}_2 = (-0{,}28-0{,}48)\,0{,}75+(-0{,}69-0{,}48)\,0{,}66+(-0{,}69 - 0)\,0{,}39+(0{,}51-0)\,1{,}11+(0{,}51-0{,}65)\,0{,}90 = -1{,}17$

$E\Delta\mathfrak{J}_3 = (0 - 0{,}51)\,1{,}11 + (-0{,}72 - 0{,}51)\,0{,}68 + (-0{,}72 + 0{,}04)\,0{,}14 + (0{,}53 + 0{,}04)\,1{,}25 + (0{,}53 - 0{,}71)\,0{,}8 = -0{,}93$

$E\Delta\mathfrak{J}_4 = (-0{,}04 - 0{,}53)\,1{,}25 + (-0{,}68 - 0{,}53)\,0{,}8 + (0{,}27 + 0{,}06)\,1{,}25 + (0{,}27 - 0{,}73)\,0{,}8 = -1{,}64$

$E\Delta\mathfrak{J}_5 = \{(-0{,}06 - 0{,}27)\,1{,}25 + (-0{,}71 - 0{,}27)\,0{,}8\}\,2 = -2{,}39.$

Da die untere Gurtung wagerecht ist, so folgt aus der Gleichung 12:

$$w_m = -\Delta\mathfrak{J}_m.$$

Berechnet man also das Momentenpolygon für einen einfachen, an den Enden frei aufliegenden Balken $A'B'$, Fig. 38, welcher durch die Einzellasten

$$-E\Delta\mathfrak{J}_1 = 1{,}88,\quad -E\Delta\mathfrak{J}_2 = 1{,}17 \text{ u. s. w.}$$

beansprucht wird, so sind die Ordinaten M dieses Polygons gleich den mit E multiplicirten Durchbiegungen δ. Ist die Feldweite λ konstant, so darf man bei der Berechnung der Momente M für den Balken $A'B'$ die Annahme $\lambda = 1$ machen, und erhält dann $M = \frac{E\delta}{\lambda}$.

Es ergiebt sich:

$$M_1 = 6{,}815,\; M_2 = 11{,}750,\; M_3 = 15{,}515,\; M_4 = 18{,}350 \text{ und } M_5 = 18{,}545\text{*)},$$

und es folgen nun, wegen $\lambda = 400$ cm und $E = 2000$ t für das qcm, die Durchbiegungen:

$$\delta = \frac{M\lambda}{E} = \frac{M\,400}{2000} = \frac{M}{5};$$

$$\text{also } \delta_1 = \frac{6{,}815}{5} = 1{,}4\,\text{cm},\quad \delta_2 = \frac{11{,}750}{5} = 2{,}35\,\text{cm},$$

$$\delta_3 = 3{,}1\,\text{cm},\quad \delta_4 = 3{,}7\,\text{cm},\quad \delta_5 = 3{,}9\,\text{cm}.$$

---

*) Hat man die Biegungsmomente für einen durch eine grössere Zahl von Einzellasten beanspruchten Balken zu berechnen, so ermittele man zuerst die Querkräfte. Für den vorliegenden symmetrischen Belastungsfall erhält man folgenden Ansatz:

für Feld 5 ist $Q_5 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}39 = 1{,}195$	$M_1 = Q_1 = 6{,}815$
dazu addirt . . . . $1{,}640 = w_4$	dazu addirt $4{,}935 = Q_2$
giebt $Q_4 = 2{,}835$	giebt $M_2 = 11{,}750$
$+\,0{,}930 = w_3$	$+\,3{,}765 = Q_3$
$Q_3 = 3{,}765$	$M_3 = 15{,}515$
$+\,1{,}170 = w_2$	$+\,2{,}835 = Q_4$
$Q_2 = 4{,}935$	$M_4 = 18{,}350$
$+\,1{,}880 = w_1$	$+\,1{,}195 = Q_5$
$Q_1 = 6{,}815$	$M_5 = 19{,}545$

§ 6.

Das Biegungspolygon eines Strebenfachwerkes.
(Zweites Verfahren.)

Haben sämmtliche Stäbe eine gegen die Senkrechte geneigte Lage, so nennt man das Stabsystem ein Strebenfachwerk. Für ein solches möge dasjenige Polygon bestimmt werden, dessen Ordinaten gleichzeitig die senkrechten Verschiebungen δ der Knotenpunkte der oberen und der unteren Gurtung liefern.

Mit Bezugnahme auf die aus der Fig. 40 zu ersehende Bezeichnung der Knotenpunkte sollen bedeuten:

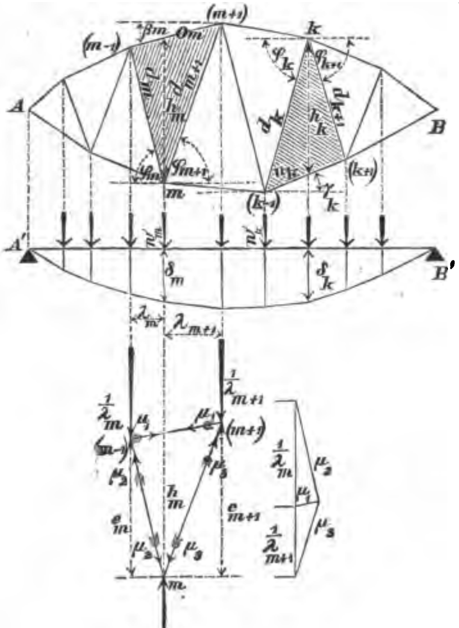


Fig. 40 u. 41.

o_m die Länge des einem Knotenpunkte m der unteren Gurtung gegenüberliegenden Obergurt-Stabes,

u_k die Länge des einem Knotenpunkte k der oberen Gurtung gegenüberliegenden Untergurt-Stabes,

d_m die Länge der m^{ten} Diagonale,

β_m den Neigungswinkel von o_m gegen die Wagerechte,

γ_k den Neigungswinkel von u_k gegen die Wagerechte,

φ_m den Neigungswinkel von d_m gegen die Wagerechte,

e_m die senkrechte Projektion von d_m.

Um eine einfache Beziehung zwischen den Verlängerungen Δo_m, Δd_m, Δd_{m+1} der Seiten des Dreiecks $(m-1)-m-(m+1)$, und den Verkürzungen

$$\Delta e_m = \delta_{m-1} - \delta_m \text{ und } \Delta e_{m+1} = \delta_{m+1} - \delta_m$$

der Strecken e_m und e_{m+1} zu erhalten, denken wir dieses Dreieck herausgelöst und in den Punkten $m-1$ und $m+1$ mit den senkrechten Kräften $\frac{1}{\lambda_m}$ und $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$ belastet, Fig 41, während wir den Punkt m festlegen. In den drei Stäben o_m, d_m, d_{m+1} entstehen gewisse Spannkräfte μ_1, μ_2, μ_3, und es lautet, da μ_2 und μ_3 Drücke sind, die Arbeitsgleichung:

$$\frac{1}{\lambda_m}\Delta e_m + \frac{1}{\lambda_{m+1}}\Delta e_{m+1} = \mu_1 \Delta o_m - \mu_2 \Delta d_m - \mu_3 \Delta d_{m+1}.$$

Mit Hilfe des Kräfteplanes in Fig. 41 ergiebt sich nun, wenn h_m die bei m gemessene senkrechte Höhe des Fachwerks bedeutet,

$$\mu_1 : \frac{1}{\lambda_m} = \lambda_m \sec \beta_m : h_m \text{ und hieraus } \mu_1 = \frac{\sec \beta_m}{h_m},$$

$$\mu_2 : \frac{1}{\lambda_m} = d_m : h_m = \lambda_m \sec \varphi_m : h_m \quad \text{,,} \quad \mu_2 = \frac{\sec \varphi_m}{h_m},$$

$$\mu_3 : \frac{1}{\lambda_{m+1}} = d_{m+1} : h_m = \lambda_{m+1} \sec \varphi_{m+1} : h_m \text{ und hieraus}$$

$$\mu_3 = \frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m},$$

und es wird

$$\frac{\Delta e_m}{\lambda_m} + \frac{\Delta e_{m+1}}{\lambda_{m+1}} = \frac{\Delta o_m \sec \beta_m - \Delta d_m \sec \varphi_m - \Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m}.$$

Werden die Δe durch die δ ausgedrückt, so folgt

$$\frac{\delta_m - \delta_{m+1}}{\lambda_m} - \frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{\lambda_{m+1}} = \frac{-\Delta o_m \sec \beta_m + \Delta d_m \sec \varphi_m + \Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m},$$

und ebenso ergiebt sich, wenn k ein Knotenpunkt der oberen Gurtung ist, zwischen den Verschiebungen δ_{k-1}, δ_k, δ_{k+1} die Beziehung

$$\frac{\delta_k - \delta_{k-1}}{\lambda_k} - \frac{\delta_{k+1} - \delta_k}{\lambda_{k+1}} = \frac{\Delta u_k \sec \gamma_k - \Delta d_k \sec \varphi_k - \Delta d_{k+1} \sec \varphi_{k+1}}{h_k}.$$

Vergleicht man diese Beziehungen mit den auf Seite 30 und 31 abgeleiteten Gleichungen 12 und 13, so erkennt man,

dass das gesuchte Biegungspolygon mit dem Momentenpolygone eines Balkens $A'B'$ übereinstimmt, welcher durch senkrechte Kräfte

$$(16) \quad w_m = \frac{-\Delta o_m \sec \beta_m + \Delta d_m \sec \varphi_m + \Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m}, \text{ und}$$

$$(17) \quad w_k = \frac{\Delta u_k \sec \gamma_k - \Delta d_k \sec \varphi_k - \Delta d_{k+1} \sec \varphi_{k+1}}{h_k}$$

belastet wird.

In Figur 40 ist vorausgesetzt worden, dass die senkrechten Verschiebungen der Endpunkte A und B gleich Null sind, dass also $A'B'$ ein an den Enden frei aufliegender Balken ist.

Zahlenbeispiel. Es sollen die senkrechten Verschiebungen sämmtlicher Knotenpunkte des in Fig. 42 dargestellten schmiedeeisernen Netzwerkes unter der Voraussetzung berechnet werden, dass in jedem Knotenpunkte der oberen Gurtung eine Last von 12t angreift.

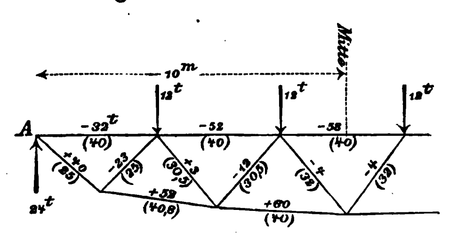
In Fig. 42 sind die Spannkräfte in Tonnen (nicht eingeklammerte Zahlen) und die Stablängen in dm (eingeklammerte Zahlen) angegeben

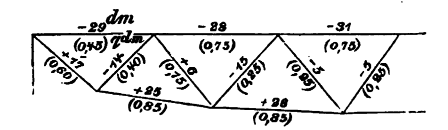
und in Fig. 43 die unter der Annahme $E = 100$ statt des wirklichen Werthes $E = 200000\text{t}$ für das qdm) berechneten Verlängerungen der Stäbe in dm und die Querschnittsflächen in qdm zusammengestellt worden. Für den ersten Stab der oberen Gurtung beträgt z. B. die Querschnittsfläche 0,45 qdm und die Verlängerung Δo

$$= -\frac{32 \cdot 40}{100 \cdot 0{,}45} = -29\text{dm}.$$

Schliesslich wurden in Fig. 44 die senkrechten Trägerhöhen und die mit der Sekante des Stab-Neigungswinkels (gegen die Wagerechte) multiplicirten Verlängerungen eingetragen, z. Beisp. für eine Diagonale des Mittelfeldes $\Delta d \cdot \sec \varphi$

$$= -5 \cdot \frac{32}{20} = -8\,\text{dm}.$$





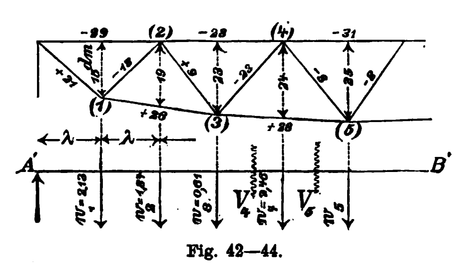


Fig. 42—44.

Es ergeben sich jetzt mittelst der Gleichung 16 für die unteren Knotenpunkte 1, 3 und 5 die Werthe

$$w_1 = \frac{29 + 21 - 18}{15} = 2{,}13,$$

$$w_3 = \frac{28 + 9 - 23}{23} = 0{,}61,$$

$$w_5 = \frac{31 - 8 - 8}{25} = 0{,}60$$

und mittelst der Gleichung 17 für die oberen Knotenpunkte die Werthe

$$w_2 = \frac{26 + 18 - 9}{19} = 1{,}84,$$

$$w_4 = \frac{28 + 23 + 8}{24} = 2{,}46.$$

Um die Biegungsmomente für den mit den Werthen w belasteten Balken $A'B'$ schnell zu erhalten, berechnen wir zuerst die Querkräfte $Q_5 = \frac{1}{2}w_5 = 0{,}30$, $Q_4 = 0{,}30 + w_4 = 2{,}76$, $Q_3 = 2{,}76 + w_3 = 3{,}37$,

$$Q_2 = 3{,}37 + w_2 = 5{,}21,\quad Q_1 = 5{,}21 + w_1 = 7{,}34$$

und hierauf, unter der vorläufigen Annahme: $\lambda = 1$, die Biegungsmomente

$$\mathrm{M}_1 = Q_1 = 7{,}34,\ \mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_1 + Q_2 = 12{,}55,\ \mathrm{M}_3 = \mathrm{M}_2 + Q_3 = 15{,}92,$$
$$\mathrm{M}_4 = \mathrm{M}_3 + Q_4 = 18{,}68 \text{ und } \mathrm{M}_5 = \mathrm{M}_4 + \mathrm{M}_5 = 18{,}98.$$

Um die Durchbiegungen zu erhalten, müssen wir die Momente M mit $\lambda = 20$ dm multipliciren und (da wir vorhin $E = 100$ statt $E = 200000$ setzten) durch 2000 dividiren. Es ergiebt sich

$$\delta_5 = \frac{18{,}98 \cdot 20}{2000}\,\mathrm{dm} = 19{,}0\,\mathrm{mm}$$

und ebenso $\delta_4 = 18{,}7$ mm, $\delta_3 = 15{,}9$ mm, $\delta_2 = 12{,}6$ mm, $\delta_1 = 7{,}3$ mm.

§ 7.

Aenderung der Länge einer Gurtsehne. (Fig. 45a.)

Es soll die Verlängerung ξ der irgend zwei Knotenpunkte 0 und n einer Gurtung verbindenden Sehne bestimmt werden. Die Lothe von den Knotenpunkten $1, 2, \ldots m \ldots$ auf diese Sehne seien $= y_1, y_2, \ldots y_m \ldots$, und die Projektionen der Längen $s_1, s_2, \ldots s_m \ldots$ der von der Sehne $0 - n$ unterspannten Gurtstäbe auf $0 - n$ seien $= e_1, e_2, \ldots e_m \ldots$

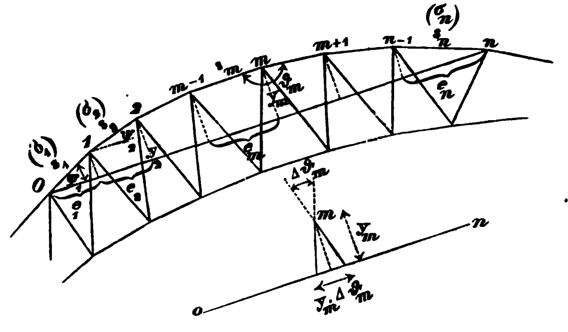


Fig. 45a u. b.

Die Vergrösserung irgend eines Randwinkels ϑ_m um $\Delta\vartheta_m$ bedingt die durch die Figur 45b nachgewiesene Aenderung $\xi = y_m \Delta\vartheta_m$, und die Verlängerung Δs_m der Länge s_m eines Gurtstabes erzeugt $\xi = \Delta s_m \cos\psi_m$, wobei

$\psi_m =$ Neigungswinkel des Stabes s_m gegen die fragliche Sehne.

Im Ganzen entsteht also

$$\xi = \sum_1^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m + \sum_1^{n} \Delta s_m \cos\psi_m$$

und, wenn für den Fall $t = 0$

$$\Delta s_m = s_m \frac{\sigma_m}{E} = \frac{e_m}{\cos\psi_m} \cdot \frac{\sigma_m}{E}$$

gesetzt wird,

$$(18)\quad \xi = \sum_1^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m + \sum_1^{n} \frac{\sigma_m}{E} e_m.$$

Beispiele für die Anwendung dieser Gleichung finden sich im § 8 und § 10.

§ 8.
Aufgaben, betreffend die Ermittelung von Biegungslinien.

Aufgabe 1. Gesucht die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte der unteren Gurtung des in Fig. 46 dargestellten Fachwerkträgers mit 2 nicht an den Enden stehenden Stützen A und B.

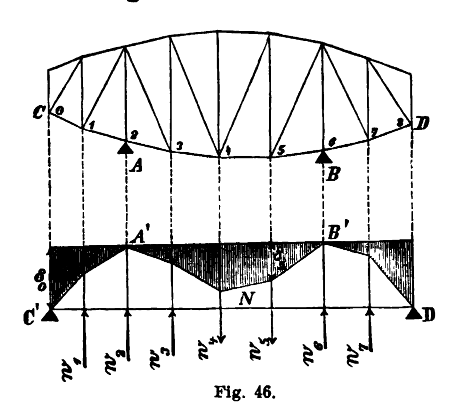


Fig. 46.

Man nehme zunächst C und D in senkrechter Richtung unverschieblich an und zeichne das Momentenpolygon $C'A'N'B'D'$ für einen bei C' und D' frei aufliegenden Balken, auf welchen die nach Gleich. 12 berechneten Lasten w (welche theils positiv, theils negativ sind*) wirken. Bringt man hierauf die Senkrechten durch die festen Stützpunkte A und B in A' und B' mit dem Momentenpolygone zum Schnitte und zieht die Gerade $A'B'$, so erhält

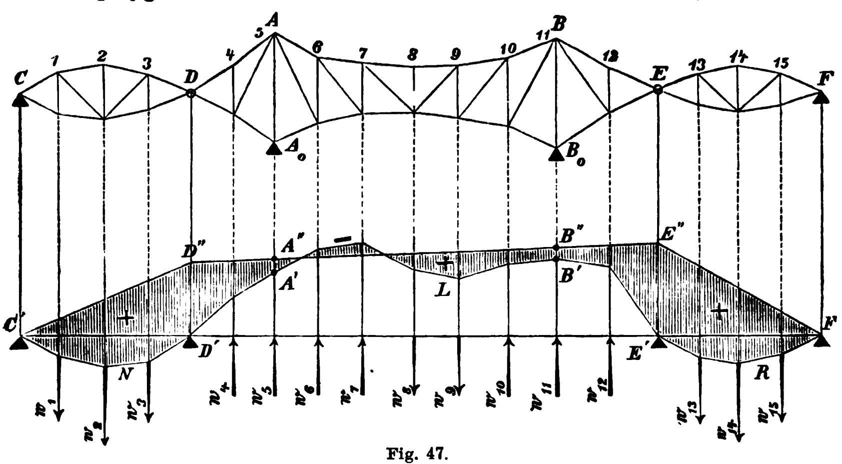


Fig. 47.

man in der schraffirten Fläche die gesuchte Biegungsfläche. Beispielsweise ist die Senkung der Knotenpunkte o und 5 gleich δ_0 bezieh. δ_5.

Aufgabe 2. Gesucht die Biegungsfläche für die obere Gurtung $CDABEF$ des Gerber'schen Trägers in Fig. 47.

*) In Fig. 46 wurden w_4 und w_5 positiv, die übrigen w negativ (also nach oben gerichtet) angenommen.

Nachdem die den Knotenpunkten 1 bis 3, 4 bis 12 und 13 bis 15 entsprechenden (theils positiv, theils negativ ausfallenden) Werthe w berechnet worden sind, werden die Momentenpolygone gezeichnet:

$C'ND'$ für den einfachen Balken $C'D'$ mit den Lasten w_1 bis w_3,
$D'LE'$ „ „ „ „ $D'E'$ „ „ „ w_4 „ w_{12},
$E'RF'$ „ „ „ „ $E'F'$ „ „ „ w_{13} „ w_{15}.

Hierauf werden die Senkrechten durch die Punkte A und B mit dem Momentenpolygone $D'LE'$ in A' und B' zum Schnitte gebracht, die Strecken

$$\overline{A'A''} = \delta' = \text{Senkung des Punktes } A,$$
$$\overline{B'B''} = \delta'' = \quad „ \quad „ \quad „ \quad B$$

abgetragen und der durch A'' und B'' gehende Linienzug $C'D''E''F'$, dessen Ecken senkrecht unter D und E liegen, eingezeichnet. Die Fläche zwischen diesem Linienzuge und dem Momentenpolygone ist die gesuchte Biegungsfläche.

Bei starren Stützen A_0 und B_0 ist

$$\delta' = \text{Verkürzung der Vertikale } A_0A,$$
$$\delta'' = \quad „ \quad „ \quad „ \quad B_0B.$$

Aufgabe 3. Gesucht die Biegungslinie für die obere Gurtung des in Fig. 48 dargestellten Dreigelenk-Bogens.

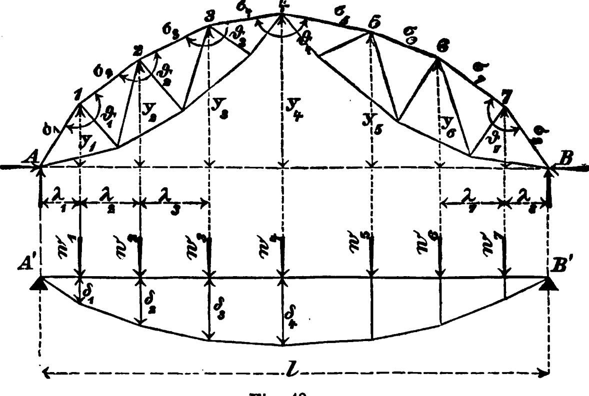


Fig. 48.

Es handelt sich hier nur um die Berechnung des Momentenpolygons für den einfachen Balken $A'B'$, auf welchen die Lasten w_1, w_2, ... w_7 wirken. Die Werthe w_1 bis w_3 und w_5 bis w_7 lassen sich ohne weiteres mit Hilfe der im § 6 gegebenen Gleich. 14 berechnen, da sich die Randwinkel ϑ_1 bis ϑ_3 und ϑ_5 bis ϑ_7 aus Dreieckswinkeln zusammensetzen. Um w_4 mittels der Gleich. 14 bestimmen zu können, muss $\Delta\vartheta_4$ bekannt sein. Nun ist die durch Aenderungen der Randwinkel und die Spannungen in den Gurtstäben bedingte Aenderung ξ der Stützweite AB nach § 7, zunächst für den Fall $t = 0$:

$$\xi = \frac{\sigma_1}{E}\lambda_1 + \frac{\sigma_2}{E}\lambda_2 + \frac{\sigma_3}{E}\lambda_3 + \frac{\sigma_4}{E}\lambda_4 + \ldots\ldots + \frac{\sigma_8}{E}\lambda_8$$
$$+ y_1\Delta\vartheta_1 + y_2\Delta\vartheta_2 + y_3\Delta\vartheta_3 + y_4\Delta\vartheta_4 + y_5\Delta\vartheta_5 + y_6\Delta\vartheta_6 + y_7\Delta\vartheta_7$$

und man erhält somit, bei gegebener Verschiebung $\xi = \Delta l$, den Werth

$$\Delta \vartheta_4 = \frac{\Delta l - \sum_1^3 y \Delta \vartheta - \sum_5^7 y \Delta \vartheta - \sum_1^8 \frac{\sigma}{E} \lambda}{y_4}.$$

Bei starren Stützen ist $\Delta l = 0$. Sind die Kämpfer A und B durch eine Zugstange mit dem Querschnitte F_0 verbunden, so ist $\Delta l =$ Verlängerung dieser den Horizontalschub H des Bogens aufnehmenden Stange; es folgt dann $\Delta l = \frac{Hl}{EF_0}$. Sollen Temperaturänderungen berücksichtigt werden, so ist σ durch $\sigma + \varepsilon Et$ zu ersetzen, während für Δl der Werth $\frac{Hl}{EF_0} + \varepsilon t_0 l$ einzuführen ist. Hierbei bedeutet t die Temperaturänderung für einen Stab der oberen Gurtung und t_0 die Temperaturänderung für die Stange AB.

§ 9.

Ebene Fachwerkträger mit veränderlicher Belastung. Einflusslinien für die statisch nicht bestimmbaren Grössen X.

1) Stellt man bei Fachwerken mit veränderlicher Belastung die Spannkraft S eines jeden Stabes in einer solchen Form als Funktion der Lasten P dar, dass der Einfluss jeder einzelnen Last auf S ersichtlich ist, so vermag man anzugeben, welche Lasten in dem Stabe einen Zug und welche Lasten einen Druck hervorbringen, und wie gross die Grenzwerthe S_{max} (= grösster Zug) und S_{min} (= grösster Druck) sind. In gleicher Weise können die Werthe C_{max} und C_{min} für jede Auflagerkraft berechnet werden.

Handelt es sich um ein ebenes Fachwerk mit senkrechter Belastung, so verfolge man den Einfluss einer über den Träger fortschreitenden Last „Eins“, trage den Werth S beziehungsweise C unter dem jedesmaligen Angriffspunkte der Last als Ordinate auf und verbinde die Endpunkte dieser Ordinaten durch eine Linie, welche die Einflusslinie für S bezieh. C heisst; die zwischen ihr und der Abscissenachse gelegene Fläche wird die Einflussfläche für S bezieh. C genannt.

Die Einflusslinien für die Werthe S und C lassen sich mit Hilfe der Gleichungen

$$S = S_0 + S'X' + S''X'' + S'''X''' + \ldots.$$
$$C = C_0 + C'X' + C''X'' + C'''X''' + \ldots.$$

leicht finden, sobald die Einflusslinien für die Grössen X', X'', X''' .... gegeben sind. Die Ermittelung dieser „X-Linien“ ist das Ziel der nachstehenden Untersuchungen, und zwar soll sie unter der Voraussetzung

erfolgen, dass jede zwischen zwei Knotenpunkten wirkende Last durch einfache Zwischenträger auf die benachbarten Knotenpunkte übertragen wird. Es ist dann jede Einflusslinie ein aus geraden Linien bestehendes Polygon, dessen Ecken den Knotenpunkten des Fachwerkes entsprechen. Besitzt z. B. (Fig. 49) die X'-Linie unter den Knotenpunkten $(m-1)$ und m die Ordinaten X'_{m-1} und X'_m, und wird der durch eine zwischen $m-1$ und m gelegene Last P verursachte Werth X' gesucht, so bestimmt man die durch den Zwischenträger auf die Knotenpunkte $(m-1)$ und m übertragenen Lastantheile

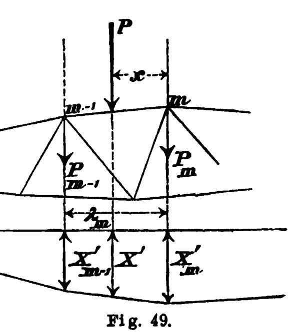


Fig. 49.

$$P_{m-1} = P\frac{x}{\lambda_m} \text{ und } P_m = P\frac{\lambda_m - x}{\lambda_m}$$

und erhält:

$$PX' = P_{m-1}X'_{m-1} + P_m X'_m.$$

Hieraus folgt aber

$$X' = X'_{m-1}\frac{x}{\lambda_m} + X'_m\frac{\lambda_m - x}{\lambda_m},$$

und dieser Ausdruck ist in Bezug auf die Veränderliche x vom ersten Grade.

2) Die statisch nicht bestimmbaren Grössen X', X'' ..... müssen, wenn im Allgemeinen nachgiebige Stützen vorausgesetzt werden, den im § 3 abgeleiteten Gleichungen genügen:

$$\Sigma C'\Delta c = \Sigma S'\Delta s,\ \Sigma C''\Delta c = \Sigma S''\Delta s,\ \Sigma C'''\Delta c = \Sigma S'''\Delta s, \ldots\ldots$$

und diese gehen mit

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s$$

und nach Einsetzen der Werthe S über in

$$\left.\begin{array}{l} L' - \Sigma\varepsilon t S's = \Sigma S_0 S'\rho + X'\Sigma S'^2\rho + X''\Sigma S''S'\rho \\ \qquad + X'''\Sigma S'''S'\rho + \ldots\ldots \\ L'' - \Sigma\varepsilon t S''s = \Sigma S_0 S''\rho + X'\Sigma S'S''\rho + X''\Sigma S''^2\rho \\ \qquad + X'''\Sigma S'''S''\rho + \ldots \\ L''' - \Sigma\varepsilon t S'''s = \Sigma S_0 S'''\rho + X'\Sigma S'S'''\rho \\ \qquad + X''\Sigma S''S'''\rho + X'''\Sigma S'''^2\rho + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (19),$$

wobei, zur Abkürzung,

$$(20)\quad \frac{s}{EF} = \rho$$

gesetzt wurde, während L', L'', L''', ... die virtuellen Arbeiten der Auflagerkräfte für die Zustände $X' = 1$, $X'' = 1$, $X''' = 1$, ... bedeuten.

Wird das Fachwerk zunächst unbelastet gedacht, so verschwinden die von S_0 abhängigen Glieder, und es ergeben sich, durch Auflösung der Gleichungen 19, die durch die Verschiebungen der Stützpunkte und durch eine Aenderung des anfänglichen Temperaturzustandes hervorgerufenen Grössen X in der Form

$$(21)\quad \begin{cases} X' = \alpha'\,(L' - \Sigma \varepsilon t S' s) + \beta'\,(L'' - \Sigma \varepsilon t S'' s) \\ \quad + \gamma'\,(L''' - \Sigma \varepsilon t S''' s) + \ldots\ldots \\ X'' = \alpha''\,(L' - \Sigma \varepsilon t S' s) + \beta''\,(L'' - \Sigma \varepsilon t S'' s) \\ \quad + \gamma''\,(L''' - \Sigma \varepsilon t S''' s) + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

wobei α', β', γ', ... α'', β'', γ'', ... Werthe sind, welche nur von den Koefficienten der Grössen X in den Gleichungen 19 abhängen und nur einmal berechnet zu werden brauchen, da sie lediglich durch die Form des Fachwerks bestimmt sind.

Nach Erledigung dieser in der Regel wenig zeitraubenden Rechnungen ergeben sich die von der Belastung abhängigen Werthe:

$$(22)\quad \begin{cases} X' = -\alpha' \Sigma S_0 S' \rho - \beta' \Sigma S_0 S'' \rho - \gamma' \Sigma S_0 S''' \rho - \ldots. \\ X'' = -\alpha'' \Sigma S_0 S' \rho - \beta'' \Sigma S_0 S'' \rho - \gamma'' \Sigma S_0 S''' \rho - \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

und mit Hilfe dieser letzteren Gleichungen lassen sich die Einflusslinien für die Grössen X', X'' .... schnell finden, sobald die Einflusslinien für die von der jedesmaligen Belastung abhängigen Summen

$$\Sigma S_0 S' \rho,\ \Sigma S_0 S'' \rho,\ \ldots..$$

bekannt sind.

Wir zeigen jetzt die Ermittelung dieser Summen für den Fall, dass auf das Fachwerk nur eine senkrechte Lasteinheit P wirkt, welche in irgend einem Knotenpunkte des statisch bestimmten Hauptnetzes, das meistens ein einfacher Balken oder ein Drei-Gelenkbogen oder ein Gerber'scher Balken sein wird, angreift.

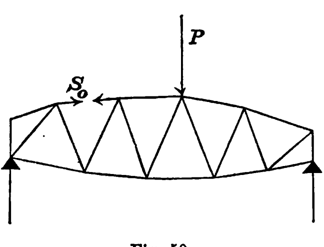


Fig. 50.

Da die Last P in den Stäben des Hauptnetzes die Spannkräfte S_0 erzeugt (Fig. 50), so ist die durch irgend welche Aenderungen Δs der Stablängen hervorgebrachte Senkung δ ihres Angriffspunktes (nach § 4) durch die Arbeitsgleichung

$$P\delta = \Sigma S_0 \Delta s\,^{*})$$

gegeben, und es besteht insbesondere

---

*) Bei Aufstellung dieser Arbeitsgleichung werden die Stützen starr vorausgesetzt, da der Einfluss etwaiger Verschiebungen Δc der Stützpunkte gesondert mit Hilfe der Gleich. 21 beurtheilt wird. Die Reibungswiderstände an den Auflagern werden gleich Null angenommen.

zwischen den durch die Ursache $X' = 1$ (welche die Spannkräfte S' erzeugt) bedingten Verschiebungen δ' und $\Delta's$ die Beziehung:

$$P\delta' = \Sigma S_0 \Delta's = \Sigma S_0 \cdot \frac{S's}{EF},$$

aus welcher sich

$$(23\text{a}) \quad \Sigma S_0 S' \rho = P\delta'$$

ergiebt.

Da nun δ' die Ordinate des den Spannungen $\sigma' = \frac{S'}{F}$ entsprechenden Biegungspolygones derjenigen Gurtung ist, welcher der Angriffspunkt von P angehört, so ergiebt sich der wichtige Satz:

Bewegt sich über den Träger eine Last „Eins“, welche der Reihe nach in den verschiedenen Knotenpunkten der $\frac{\textit{oberen}}{\textit{unteren}}$ Gurtung des Hauptnetzes angreift, so stimmt die Einflusslinie für den Ausdruck $\Sigma S_0 S' \rho$ mit dem für den Belastungszustand $X' = 1$ berechneten Biegungspolygone der $\frac{\textit{oberen}}{\textit{unteren}}$ Gurtung des Hauptnetzes überein.

In gleicher Weise lassen sich die Einflusslinien für die übrigen in den Gleichungen 22 vorkommenden Summen darstellen. Man erhält

$$(23\text{b}) \quad \Sigma S_0 S'' \rho = P\delta'', \ \Sigma S_0 S''' \rho = P\delta''' \text{ u. s. f.,}$$

unter δ'', δ''', ... die unter dem jedesmaligen Angriffspunkte von P gemessenen Ordinaten der Biegungspolygone verstanden, welche beziehungsweise für die Spannungszustände $X'' = 1$, $X''' = 1$, ... und für die Gurtung berechnet worden sind, in deren Knotenpunkten die Last P nacheinander angreift.

Die Gleichungen 22 gehen jetzt über in

$$X' = -(\alpha'\delta' + \beta'\delta'' + \gamma'\delta''' + \ldots\ldots) P$$
$$X'' = -(\alpha''\delta' + \beta''\delta'' + \gamma''\delta''' + \ldots\ldots) P$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und ermöglichen eine schnelle Berechnung der Einflusslinien für sämmtliche Grössen X.

Meistens greift die veränderliche Belastung nur in den Knotenpunkten der einen Gurtung an, und es ist dann in der Regel zulässig, das Eigengewicht ausschliesslich auf die Knotenpunkte dieser Gurtung zu vertheilen. Sind die Knotenpunkte beider Gurtungen Angriffspunkte veränderlicher Lasten, so hat man für jeden Werth X zwei Einflusslinien zu zeichnen, da die Wirkungen der oben und unten angreifenden Lasten gesondert untersucht werden müssen.

Beispiel 1. Der vereinigte Balken- und Bogenträger in Fig. 51 mit einem festen Lager bei B und einem wagerechten Gleit-

lager bei A ist einfach statisch unbestimmt. Es lassen sich deshalb die Spannkräfte in der Form

$$S = S_0 + S'X$$

darstellen, und es ergiebt sich, da die Verschiebungen der Stützen im vorliegenden Falle ohne Einfluss auf die Beanspruchung des Fachwerks sind, zur Berechnung der statisch nicht bestimmbaren Grösse X aus der ersten der Gleichungen 19 die Bedingung:

$$-\Sigma \varepsilon t S' s = \Sigma S_0 S' \rho + X \Sigma S'^2 \rho,$$

aus welcher erhalten wird

der Einfluss einer Temperaturänderung: $X_t = \dfrac{-\Sigma \varepsilon t S' s}{\Sigma S'^2 \rho}$

und „ „ der Belastung: $X = \dfrac{-\Sigma S_0 S' \rho}{\Sigma S'^2 \rho}$.

Als statisch nicht bestimmbare Grösse X wählen wir die überall gleiche wagerechte Seitenkraft der in den Stäben 1, 2, 3, 3′, 2′, 1′ des Bogens wirksamen Spannkräfte. Ist $X = 0$, so sind diese Stäbe spannungslos, und ebenso verschwinden die nur von X abhängigen Spannkräfte in den senkrechten Stäben 4, 5, 6, 5′, 4′. Als statisch bestimmtes Hauptnetz verbleibt der einfache Balken $ABCD$.*)

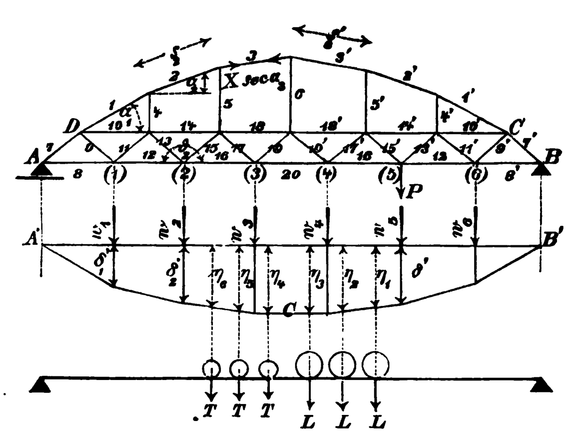


Fig. 51a u. c.

Soll nun die Einflusslinie für X unter der Voraussetzung ermittelt werden, dass eine Lasteinheit P der Reihe nach in sämmtlichen Knotenpunkten der unteren Gurtung AB angreift, so müssen die durch die Ursache $X = 1$ hervorgerufenen Spannkräfte S', sowie das Biegungspolygon der Gurtung AB für diesen Spannungszustand bestimmt werden.

---

*) Sind α_2 und α_3 die Neigungswinkel der Stäbe 2 und 3, so sind die Spannkräfte in diesen Stäben bezieh.: $S_2 = X \sec \alpha_2$ und $S_3 = X \sec \alpha_3$. Für den Stab 5 erhält man aus der Bedingung $S_5 + S_2 \sin \alpha_2 - S_3 \sin \alpha_3 = 0$ den Werth: $S_5 = -X(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3)$. In gleicher Weise werden die S für alle übrigen Bogenglieder und für die senkrechten Stäbe 4 bis 4′ berechnet.

Die Kräfte S' werden zweckmässig mit Hilfe des in Fig. 51b dargestellten Kräfteplanes gefunden. In diesem Plane schneiden die von dem Punkte O aus zu den Stäben 1, 2, 3, 3', 2', 1' gezogenen Parallelen auf der im Abstande „Eins" von O gezeichneten Senkrechten die in den Stäben 4, 5, 6, 5', 4' wirksamen Spannkräfte S' ab, und die Längen der Strahlen 1, 2, ... 1' stellen die Spannkräfte S' in den Bogengliedern vor. Aus der Spannkraft 1 findet man die Kräfte 9 und 10, hierauf 11 und 12 u. s. w. Für die Stäbe 7, 8, 8' und 7' ist $S' = 0$.*)

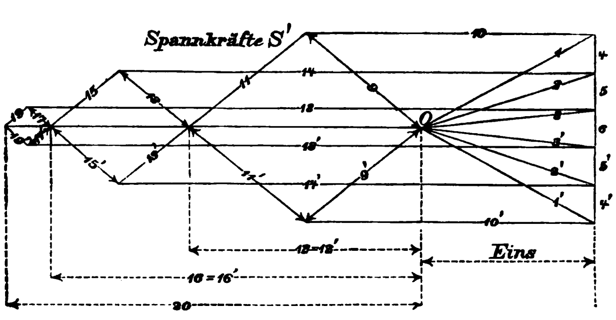


Fig. 51 b.

Nach Zeichnen dieses Kräfteplanes werden die Spannungen $\sigma' = \frac{S'}{F}$ und die von den σ' abhängigen Aenderungen $\Delta'\vartheta$ der den unteren Knotenpunkten (1), (2), (3) ... (6) entsprechenden Randwinkel ϑ berechnet, letztere nach der im § 5 gegebenen Anleitung, und hierauf kann das zugehörige Biegungspolygon $A'CB'$ der Gurtung AB ermittelt werden; dasselbe stimmt, nach § 5, Gleich. 11, mit dem Momentenpolygone eines einfachen Balkens $A'B'$ überein, welcher durch die senkrechten Lasten

$$w_1 = -\Delta'\vartheta_1,\ w_2 = -\Delta'\vartheta_2 \ldots\ldots$$

beansprucht wird.

Bedeutet nun δ' die unter P gemessene Ordinate des Polygons $A'CB'$, so ist nach dem vorhin bewiesenen Satze:

$$\Sigma S_0 S' \rho = P\delta',$$

mithin

$$X = -\frac{P\delta'}{\Sigma S'^2 \rho}.$$

Dividirt man also die Ordinaten δ'_1, δ'_2 .... des Biegungspolygones $A'CB'$ durch den konstanten Werth $\Sigma S'^2 \rho$, so erhält man die Ordinaten X_1, X_2 .... der gesuchten Einflusslinie.

Wird beispielsweise durch den Träger ein Eisenbahngleis gestützt, und bedeutet L die Belastung einer Lokomotivachse, T die Belastung

*) Die Stäbe 1, 2, 3, 3', 2', 1', 9, 12, 13, 16, 17, 20, 17', 16', 13', 12', 9 werden gezogen, die übrigen gedrückt.

einer Tenderachse, und entsprechen den Lasten L und T beziehungsweise die Polygon-Ordinaten $\eta_1, \eta_2 \ldots$, so ist der durch die Belastung in Fig. 51c erzeugte Werth X bestimmt durch die Gleichung

$$X \cdot \Sigma S'^2 \rho = -L(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) - T(\eta_4 + \eta_5 + \eta_6).$$

Das Zeichen (—) deutet an, dass der Bogen auf Druck beansprucht wird.

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass der durch eine Temperaturänderung erzeugte Werth X_t gleich Null wird, sobald ε und t konstant sind; denn setzt man in die dem Spannungszustande $X = 1$ entsprechende Arbeitsgleichung

$$\Sigma S' \overline{\Delta s} = 0,$$

welche für beliebige, mögliche Formänderungen $\overline{\Delta s}$ gilt, den Werth $\overline{\Delta s} = \omega s$, wobei ω eine Konstante, d. h. nimmt man an, dass das Fachwerk eine der früheren Form ähnliche Form annimmt, so findet man

$$\Sigma S' s = 0.$$

In der Regel setzt man innerhalb einzelner Gruppen von Stäben konstante Temperaturänderungen voraus, und kann dann die vorstehende Gleichung zur Abkürzung der Rechnung benutzen. Macht man z. B. die Annahme, dass sich die dem spannungslosen Anfangszustande des Fachwerks entsprechende Temperatur in allen Punkten des Bogens um den Betrag t_1 ändere und in allen übrigen Punkten des Trägers um t_2, so folgt

$$\Sigma \varepsilon t S' s = \varepsilon t_1 \sum_{\mathrm{I}} S' s + \varepsilon t_2 \sum_{\mathrm{II}} S' s,$$

wobei sich der Ausdruck $\sum_{\mathrm{I}} S' s$ auf die Bogenglieder 1, 2, 3, 3', 2, 1 und der Ausdruck $\sum_{\mathrm{II}} S' s$ auf alle übrigen Stäbe bezieht. Bezeichnet man mit $s_1, s_2, s_3, s'_3, s'_2, s'_1$ die Längen der Stäbe 1, 2, 3, 3', 2', 1' und mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha'_3, \alpha'_2, \alpha'_1$ deren Neigungswinkel gegen die Wagerechte, so sind die Spannkräfte S' in diesen Stäben beziehungsweise gleich

$$1 \cdot \sec \alpha_1,\ 1 \cdot \sec \alpha_2,\ 1 \cdot \sec \alpha_3, \ldots\ldots\ 1 \sec \alpha'_1$$

und es folgt

$$\sum_{\mathrm{I}} S' s = s_1 \sec \alpha_1 = s_2 \sec \alpha_2 + \ldots\ldots + s'_1 \sec \alpha'_1.$$

Da nun $\sum_{\mathrm{I}} S' s + \sum_{\mathrm{II}} S' s = 0$ ist, so ergiebt sich schliesslich

$$X_t = -\frac{\varepsilon(t_1 - t_2)}{\Sigma S'^2 \rho} [s_1 \sec \alpha_1 + s_2 + \sec \alpha_2 + s_3 \sec \alpha_3 + s'_3 \sec \alpha'_3 + s'_2 \sec \alpha'_2 + s'_1 \sec \alpha'_1].$$

Beispiel 2. Es soll der Horizontalzug X der in Fig. 52a dargestellten, durch einen Balken versteiften Kette ermittelt werden. Der Balken ist mit der Kette durch senkrechte Stäbe verbunden und besitzt kei B ein festes und bei A ein auf einer Wagerechten geführtes Lager. Bei ausschliesslich senkrechten Lasten P wirken auf den Balken

nur senkrechte Kräfte. Die Kette ruht auf Pendelpfeilern (10 und 10′), welche aus demselben Materiale hergestellt sein sollen, wie alle übrigen Stäbe des Fachwerks und als Bestandtheile des Fachwerks aufgefasst werden. Die Stabverbindung ist eine einfach statisch unbestimmte, und es mögen die Spannkräfte auf die Form

$$S = S_0 - S' X$$

gebracht werden. Die Spannkräfte S' entsprechen dann dem Zustande $X = -1$, welchen man erhält, wenn man sich in irgend einem Stabe

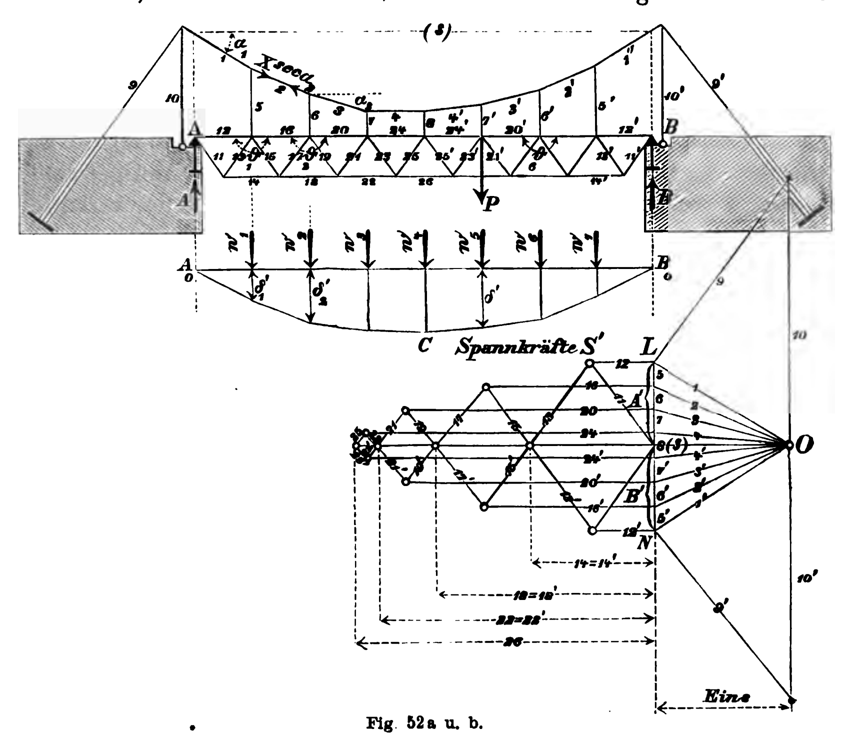


Fig. 52a u. b.

der Kette einen Druck erzeugt denkt, dessen wagerechte Seitenkraft = „Eins" ist, und es lautet die Gleichung zur Berechnung von X, sobald die Stützen starr angenommen werden,

$$-\Sigma \varepsilon t S' s = \Sigma S_0 S' \rho - X \Sigma S'^2 \rho;$$

sie liefert den durch eine Aenderung der Temperatur entstehenden Horizontalzug

$$X_t = \frac{\Sigma \varepsilon t S' s}{\Sigma S'^2 \rho}$$

und den durch eine Belastung hervorgerufenen

$$X = \frac{\Sigma S_0 S' \rho}{\Sigma S'^2 \rho}.$$

Den Kräfteplan für den Zustand $X = -1$ zeigt Fig. 52b; er wird in ähnlicher Weise konstruirt wie in dem vorigen Beispiele. Die Spannkräfte in den Kettengliedern 1, 2, 3, 4, 4′, 3′, 2′, 1′ bilden einen Strahlenbüschel, dessen wagerechte Projektion der Horizontalschub „Eins" ist, und welcher auf der Senkrechten LN die in den Hängestangen wirksamen Spannkräfte 5, 6, 7, 8, 7′, 6′, 5′ abschneidet. Die Kräfte 9 und 10, desgleichen 9′ und 10′ ergeben sich aus den Kräften 1 und 1′. Die Kräfte 5, 6, 7, 8, 7′, 6′, 5′ wirken als Drücke auf den Balken und rufen die senkrechten Auflagerwiderstände A' und B' hervor. Ist das Fachwerk symmetrisch (wie in Fig. 52 angenommen wurde), so ist $A' = B'$; im Gegenfalle verlängere man in Fig. 52 die Auflagersenkrechten A und B bis zu ihren Schnittpunkten mit der Kette, verbinde diese durch die Schlusslinie (s) und ziehe von O aus (Fig. 52b) eine Parallele zu (s); letztere zerlegt nach einem bekannten Satze der graphischen Statik den Kräftezug $5 + 6 + 7 + 8 + 7' + 6' + 5'$ in A' und B'. Nunmehr lassen sich die Spannkräfte S' auch für den Balken ermitteln.*)

Nach Zeichnen dieses Kräfteplanes werden die Spannungen $\sigma' = \frac{S'}{F}$ und die von den σ' abhängigen Aenderungen $\Delta'\vartheta$ der oberen Randwinkel ϑ bestimmt, und hierauf wird das Biegungspolygon $A_0 C B_0$ der Gurtung AB, in dessen Knotenpunkten die über den Balken wandernde Last P der Reihe nach angreifen möge, berechnet; dasselbe stimmt (nach § 5, Gleich. 14) mit dem Momentenpolygone eines einfachen Balkens $A_0 B_0$ überein, welcher durch senkrechte Lasten

$$w_1 = \Delta'\vartheta_1,\ w_2 = \Delta'\vartheta_2,\ w_3 = \Delta'\vartheta_3,\ \ldots\ldots$$

beansprucht wird.

Bedeutet nun δ' die unter P gemessene Ordinate des Biegungspolygones, so ist

$$\Sigma S_0 S' \rho = \delta',$$

und es erzeugt mithin die Last P in der Kette den Horizontalzug

$$X = \frac{P\delta'}{\Sigma S'^2 \rho}.$$

---

*) Die Spannkräfte S' sind, links von der Mitte, negativ (Drücke) für die Stäbe: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, 21, 24, 25 und positiv (Züge) für die Stäbe: 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23.

§ 10.

Der Maxwell'sche Lehrsatz und Anwendungen desselben.

Wir betrachten ein Fachwerk, dessen Stützpunkte unverrückbar sind oder über reibungslose Lager gleiten, dessen Auflagerkräfte mithin bei der eintretenden Formänderung keine Arbeit leisten.

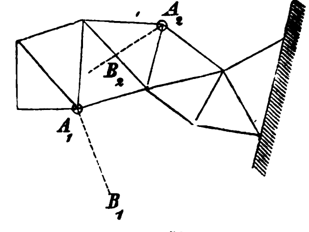


Fig. 53.

Die durch irgend welche Aenderungen Δs der Stablängen s verursachten Verschiebungen δ_1 und δ_2 der Knotenpunkte A_1 und A_2 nach den Richtungen A_1B_1 bezieh. A_2B_2 ergeben sich nach § 4 aus den Arbeitsgleichungen

$$1 \cdot \delta_1 = \Sigma S_1 \overline{\Delta s} \text{ und}$$
$$1 \cdot \delta_2 = \Sigma S_2 \overline{\Delta s},$$

wobei für irgend einen Stab

S_1 diejenige Spannkraft ist, welche eine in A_1 angreifende, nach der Richtung A_1B_1 wirkende Kraft „Eins" hervorbringt und

S_2 diejenige Spannkraft, welche entsteht, sobald in A_2 nach der Richtung A_2B_2 die Kraft „Eins" wirksam ist.

Herrscht in allen Stäben die dem spannungslosen Anfangszustande entsprechende Temperatur, so ist für irgend einen Belastungsfall

$$\overline{\Delta s} = \frac{Ss}{EF} \text{ mithin}$$

$$\delta_1 = \Sigma S_1 S \frac{s}{EF} \text{ und } \delta_2 = \Sigma S_2 S \frac{s}{EF}.$$

Ist insbesondere $S = S_2$, so ergiebt sich

$$\delta_1 = \Sigma S_1 S_2 \frac{s}{EF},$$

während im Falle $S = S_1$

$$\delta_2 = \Sigma S_2 S_1 \frac{s}{EF}$$

ist, und es folgt aus der Uebereinstimmung dieser beiden Werthe der hinsichtlich seiner Giltigkeit an die oben gemachten Annahmen gebundene Satz:

> Eine in dem Knotenpunkte A_1 und im Sinne A_1B_1 angreifende Kraft „Eins" verschiebt einen Knotenpunkt A_2 im Sinne A_2B_2 um eine Strecke, welche ebenso gross ist wie die Verschiebung, welche der Knotenpunkt A_1 im Sinne A_1B_1 erfährt, sobald im Punkte A_2 und im Sinne A_2B_2 eine Kraft „Eins" angreift.

Um diesen zuerst von Maxwell aufgestellten Satz zu erweitern, wollen wir den Buchstaben P und δ, die bis jetzt zur Bezeichnung

einer Einzellast und der Verschiebung des Angriffspunktes dieser Last im Sinne der Last dienten, eine allgemeinere Bedeutung beilegen, so zwar, dass wir unter $P\delta$ die virtuelle Arbeit einer ganzen Gruppe von Lasten verstehen. Diese Gruppenbildung möge durch einige Beispiele erläutert werden.

1) Greifen in zwei Punkten m, m_1 (Fig. 54) zwei entgegengesetzte, gleich grosse Kräfte P_m an, die in die Gerade $m\,m_1$ fallen, so ist das zugehörige δ_m gleich der gegenseitigen Verschiebung des Punktepaares m, m_1, d. h. gleich der Aenderung, welche die Entfernung $m\,m_1$ erfährt. Man nennt diese Gegenkräfte P auch die Belastung des Punktepaares $m\,m_1$ und spricht im Falle $P = 1$ von der Belastungseinheit eines Punktepaares.

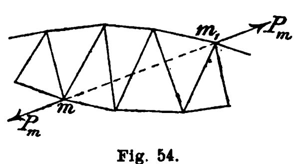


Fig. 54.

2) Werden zwei in i und k angreifende, rechtwinklig zur Geraden $i\,k$ gerichtete, entgegengesetzt gleiche Kräfte, die ein Kräftepaar bilden, dessen Moment $= P_m \cdot 1$ ist, (Fig. 55) zu einer Gruppe vereinigt, so ist das zugehörige δ_m gleich dem im Bogenmass ausgedrückten Drehungswinkel der Geraden $i\,k$*). Man spricht hier kurz von der Belastung einer Geraden (m) und im Falle $P = 1$ von der Belastungseinheit einer Geraden.

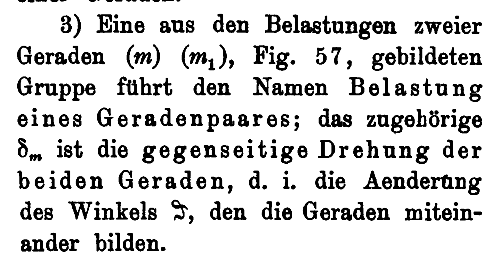


Fig. 55.

3) Eine aus den Belastungen zweier Geraden (m) (m_1), Fig. 57, gebildeten Gruppe führt den Namen Belastung eines Geradenpaares; das zugehörige δ_m ist die gegenseitige Drehung der beiden Geraden, d. i. die Aenderung des Winkels ϑ, den die Geraden miteinander bilden.

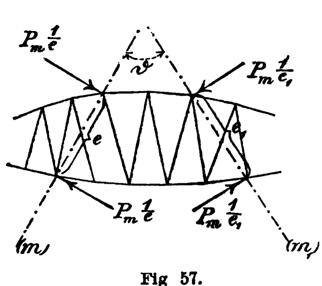


Fig 57.

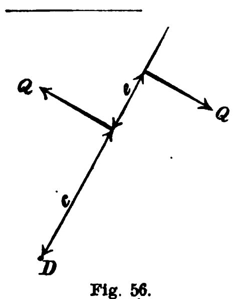


Fig. 56.

*) Um dies einzusehen, betrachte man ein Kräftepaar, dessen Moment $M = Qe$ ist und welches an einem sich um den Punkt D drehenden, beliebigen Systeme materieller Punkte angreift. Bedeuten c und $c + e$ die Lothe von D auf die Kräfte Q, und ist τ der im Sinne von M gemessene Drehungswinkel, so ist die virtuelle Arbeit der Kräfte Q:

$$Q(c + e)\tau - Qc\tau = Qe\tau = M\tau.$$

Die Bildung von Lastgruppen dürfte hiermit genügend erläutert sein, und es werde nur noch festgesetzt, dass jede am Fachwerke angreifende Last immer nur einer einzigen Gruppe zugewiesen werden soll. Der Kürze wegen nennen wir — im Anschluss an die unter 1, 2, 3 eingeführten Begriffe — eine solche Gruppe von Kräften allgemein eine **Belastung** und das zugehörige δ den **Weg dieser Belastung**. Die Ermittlung eines beliebigen δ_m für irgend einen Belastungszustand L des Fachwerks erfolgt auf dem im § 4 zur Bestimmung der Knotenpunktsverschiebungen angegebenen Wege mittels der Arbeitsgleichung für den Zustand $P_m = 1$ und lässt erkennen, dass zwischen den Wegen δ und den Belastungen P Beziehungen ersten Grades bestehen, dass also der Weg δ_m infolge von Belastungen P_a, P_b, P_c, ... P_m, P_n ... in der Form erscheint:

$$\delta_m = \delta_{ma} P_a + \delta_{mb} P_b + \delta_{mc} P_c + \ldots + \delta_{mm} P_m + \delta_{mn} P_n + \ldots$$

wobei die mit einem Doppelzeiger behafteten Werthe δ unabhängig von den Belastungen P sind. Beispielsweise bedeutet δ_{mn} den Sonderwerth von δ_m für den Fall, dass P_n die Grösse Eins besitzt, während alle übrigen P verschwinden. Bezeichnet man nun mit S_n die infolge $P_n = 1$ in irgend einem Stabe erzeugte Spannkraft und mit S_m die Spannkraft infolge $P_m = 1$, und schreibt man behufs Berechnung von δ_{mn} die Arbeitsgleichung für den Zustand $P_m = 1$ und für den Verschiebungszustand $P_n = 1$*) an, so erhält man:

$$1 \cdot \delta_{mn} = \Sigma S_m \Delta s_n = \Sigma S_m \frac{S_n s}{EF};$$

und in derselben Weise ergiebt sich für den Kräftezustand $P_n = 1$ und den Verschiebungszustand $P_m = 1$:

$$1 \cdot \delta_{nm} = \Sigma S_n \Delta s_m = \Sigma S_n \frac{S_m s}{EF}.$$

Hieraus folgt aber

$$\delta_{mn} = \delta_{nm},$$

d. h. es dürfen die beiden Buchstaben eines Doppelzeigers mit einander vertauscht werden. Das ist der **erweiterte Maxwell'sche Satz.** Aus demselben folgt u. A. für die vorhin erklärten Sonderfälle der Belastung eines Punktepaares bezieh. eines Geradenpaares:

1. Die gegenseitige Verschiebung δ_{mn} eines Punktepaares m, m_1 infolge der Belastungseinheit eines anderen Punktepaares n, n_1 ist ebenso gross wie die gegenseitige Verschiebung δ_{nm} des Punktepaares n, n_1 infolge der Belastungseinheit des Punktepaares $m\ m_1$.

*) D. h. es sollen die durch $P_n = 1$ erzeugten Formänderungen δ_{mn}, Δs_n an die Stelle der virtuellen Formänderungen $\overline{\delta}$ und $\overline{\Delta s}$ treten.

2. Die gegenseitige Drehung δ_{mn} eines Geradenpaares (m) (m_1) infolge der Belastungseinheit eines anderen Geradenpaares (n) (n_1) ist ebenso gross wie die gegenseitige Drehung des Geradenpaares (n, n_1) infolge der Belastungseinheit des Geradenpaares (m) (m_1).

3. Die gegenseitige Verschiebung eines Punktepaares m, m_1 infolge der Belastungseinheit eines Geradenpaares (n) (n_1) ist ebenso gross wie die gegenseitige Drehung des Geradenpaares (n) (n_1) infolge der Belastungseinheit des Punktepaares m, m_1.

Wie vortheilhaft der Maxwell'sche Satz in der Fachwerkstheorie verwerthet werden kann, wird die Lösung der folgenden Aufgaben zeigen.

Aufgabe 1. Gesucht die Einflusslinie für die Senkung δ_m eines Knotenpunktes m eines Fachwerkträgers (Fig. 58).

Wir nehmen das gewichtslose Fachwerk nur mit einer in m angreifenden senkrechten Kraft „Eins" belastet an, berechnen die hierbei entstehenden Spannkräfte S und Spannungen σ und bestimmen (nach § 5 bis § 8) das diesen Spannungen entsprechende Biegungspolygon derjenigen Gurtung (beispielsweise von ABC), in deren Knotenpunkten die Verkehrsbelastungen angreifen sollen. Ist nun die unter k gemessene Ordinate dieses Biegungspolygones $= \eta_k$, so verschiebt die in m angreifende Last „Eins" den Knotenpunkt k im senkrechten Sinne um η_k, und es wird mithin (nach dem eben bewiesenen Satze) eine in k angreifende Last „Eins" den Knotenpunkt m ebenfalls um η_k verschieben. Hieraus folgt, dass das gezeichnete Biegungspolygon die Einflusslinie für δ_m ist.

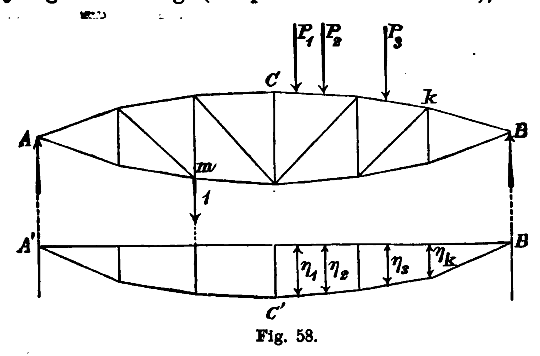


Fig. 58.

Die Lasten P_1, P_2, P_3 in Fig. 58, denen die Ordinaten η_1, η_2, η_3 entsprechen, verursachen beispielsweise bei m die Senkung

$$\delta_m = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3.$$

Aufgabe 2. Gesucht die Einflusslinie für die gegenseitige Drehung δ der Scheitelständer eines Dreigelenkbogens.

Es sei δ im Sinne der in Fig. 59 eingezeichneten Pfeile positiv. Die Belastungseinheit des aus den Achsen der Scheitelständer bestehenden Geradenpaares setzt sich aus vier gleich grossen Kräften

$\frac{1}{f'}$ zusammen (wo f' die Höhe des Bogenträgers im Scheitel) nämlich aus zwei an den Scheitelständern angreifenden Kräftepaaren, deren Momente $\frac{1}{f'} \cdot f' = 1$ sind. Der Drehungssinn dieser Kräftepaare muss mit dem Sinne der gesuchten Drehung übereinstimmen. An den Kämpfern werden nur wagerechte Auflagerwiderstände von der Grösse $\frac{1}{f}$ hervorgerufen, unter f die Pfeilhöhe des Bogens verstanden.

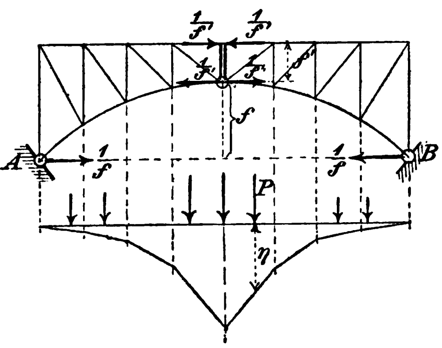


Fig 59.

Berechnet man nun die durch diese Belastungszustände erzeugten Spannkräfte S und Längenänderungen Δs und zeichnet man die hierzu gehörige Biegungslinie (vergl. § 8), so ist dies die Einflusslinie für die gesuchte Drehung δ. Der Beweis wird wie in Aufgabe 1 geführt. Die in der Fig. 59 angegebene Belastung erzeugt

$$\delta = \Sigma P \eta.$$

Die Ermittlung von δ_{max} ist erforderlich, sobald im Scheitel eine Feder angeordnet wird und die Beanspruchung dieser Feder untersucht werden soll. Vergl. § 17, Aufgabe 7.

Aufgabe 3. Einflusslinie für den Widerstand X der Mittelstütze des in Fig. 60 dargestellten kontinuirlichen Fachwerkträgers mit 3 Stützpunkten. Die Lasten greifen in den Knotenpunkten der unteren Gurtung an.

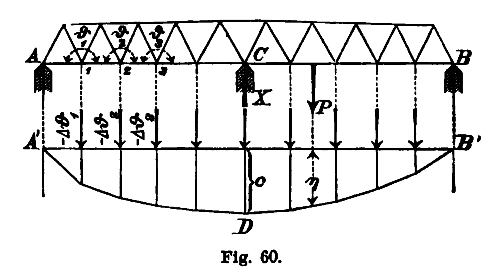


Fig. 60.

Beseitigt man die Mittelstütze, so entsteht der statisch bestimmte Balken AB. Für diesen werden, unter der Voraussetzung dass bei C eine senkrechte, abwärts gerichtete Last „Eins" angreift, die Spannkräfte S', Spannungen σ' und Aenderungen $\Delta'\vartheta$ der unteren Randwinkel berechnet, und hierauf wird das Biegungspolygon der wagerechten Gurtung AB als Momentenlinie eines durch die Aenderungen $(-\Delta'\vartheta_1)$, $(-\Delta'\vartheta_2)$, ... belasteten, einfachen Balkens $A'B'$ gezeichnet (vergl. § 5, Gleich. 11). Dieses Polygon ist die Einflusslinie für die Senkung δ des Punktes C. Wirken nun auf

das Fachwerk die beiden Kräfte P und X, und misst man unter P die Polygonordinate η und unter C die Ordinate c, so folgt

$$\delta = P\eta - Xc.$$

Aus der Bedingung $\delta = 0$ ergiebt sich

$$X = P\frac{\eta}{c}.$$

Es ist also das Biegungspolygon $A'DB'$ die Einflusslinie für X, und $\frac{1}{c}$ ist der Multiplikator für diese Linie.

Der Elasticitätsmodul E darf bei gleichem Materiale sämmtlicher Stäbe beliebig gross angenommen werden, da es nur auf das gegenseitige Verhältniss von η und c ankommt, und ebenso leuchtet ein, dass $A'DB'$ ein mit beliebigem Polabstande zu den Lasten $(-\Delta'\vartheta)$ gezeichnetes Seilpolygon sein darf.

Aufgabe 4. Einflusslinien für die Widerstände X' und X'' der Mittelstützen des in Fig. 61a dargestellten, in den Knotenpunkten der unteren Gurtung belasteten kontinuirlichen Fachwerkträgers mit 4 Stützpunkten.

Man beseitige die Mittelstützen, verwandle also den Träger in einen einfachen Balken AB, berechne diejenigen Spannkräfte S' und Spannungen $\sigma' = \frac{S'}{F}$, welche eine im Punkte C' wirksame, senkrechte, abwärts gerichtete Last „Eins“ hervorbringt und zeichne das den Spannungen σ' entsprechende Biegungspolygon $A'L'B'$ der Gurtung AB; dasselbe stimmt mit dem Momentenpolygone eines mit den Randwinkeländerungen $(-\Delta'\vartheta_1)$, $(-\Delta'\vartheta_2)$ .... belasteten einfachen Balkens $A'B'$ überein.

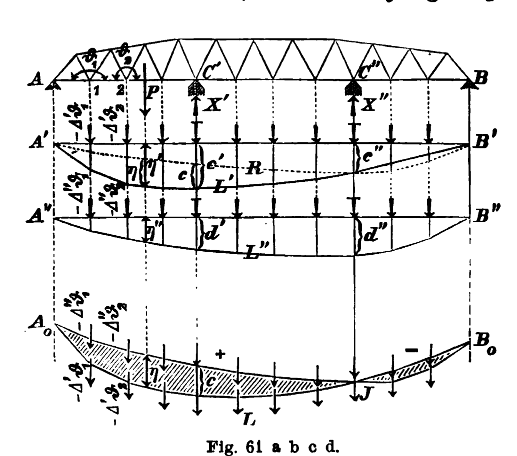


Fig. 61 a b c d.

In gleicher Weise wird dasjenige Biegungspolygon $A''L''B''$ der Gurtung AB ermittelt, welches eine im Punkte C'' angreifende Last „Eins“ verursacht.

Es sind nun $A'L'B'$ und $A''L''B''$ die Einflusslinien für die Senkungen δ' und δ'' der Punkte C' und C'' des einfachen Balkens AB, und es erzeugen somit die drei Kräfte P, X' und X'' zusammen

die Durchbiegungen

$$\delta' = P\eta' - X'c' - X''c'' \text{ und}$$
$$\delta'' = P\eta'' - X'd' - X''d'',$$

wobei c' und c'' die unter den Stützpunkten C' und C'' gemessenen Ordinaten des Polygons $A'L'B'$ und d' und d'' die entsprechenden Ordinaten des Polygons $A''L''B''$ sind.

Aus den Bedingungen $\delta' = 0$ und $\delta'' = 0$ ergeben sich zur Berechnung von X' und X'' die Gleichungen

$$X'c' + X''c'' = P\eta'$$
$$X'd' + X''d'' = P\eta''$$

und aus diesen folgt:

$$X' = \frac{\eta' - \eta''\frac{c''}{d''}}{c' - d'\frac{c''}{d''}} P.$$

Sind die Ordinaten des in Fig. 61b gestrichelten Polygons $A'RB'$ gleich den mit $\frac{c''}{d''}$ multiplicirten Ordinaten η'' des Polygons $A''L''B''$, und ist der Unterschied der Ordinaten der Polygone $A'L'B'$ und $A'RB'$, unter P gemessen, $= \eta$ und, unter der Stütze C' gemessen, $= c$, so folgt

$$\eta = \eta' - \eta''\frac{c''}{d''} \text{ und}$$

$$c = c' - d'\frac{c''}{d''}, \text{ und es ergiebt sich}$$

$$X' = P\frac{\eta}{c}.$$

Da es nun, um X' zu bestimmen, nur auf das Verhältniss $\frac{\eta}{c}$ ankommt, so leuchtet sofort folgende einfache Konstruktion der Einflusslinie für X' ein.

Man zeichne Fig. 61d zu den als senkrechte Lasten aufzufassenden Randwinkeländerungen $(-\Delta'\mathfrak{T}_1)$ $(-\Delta'\mathfrak{T}_2)$ ..... mit beliebigem Polabstande ein Seilpolygon A_0LB_0, welches die Senkrechte durch den Stützpunkt C'' in J und die Senkrechten durch die Endstützen in A_0 und B_0 schneiden möge. Hierauf zeichne man zu den Aenderungen $(-\Delta''\mathfrak{T}_1)$, $(-\Delta''\mathfrak{T}_2)$ ...... ein durch die 3 Punkte A_0, J und B_0 gehendes Seilpolygon. Misst man jetzt unter P den senkrechten Abstand η der beiden Seilpolygone und unter der Stütze C' den Abstand c, so folgt

$$X' = P\frac{\eta}{c}.$$

Es ist also die in Fig. 61 d schraffirte Fläche die Einflussfläche für X'; dieselbe ist links von der Stütze C'' positiv, rechts von dieser Stütze negativ. Der Werth $\frac{1}{c}$ ist der Multiplikator der Einflussfläche.

In gleicher Weise wird die Einflussfläche für X'' gefunden.

Sind sämmtliche Stäbe aus gleichem Materiale, so darf bei Berechnung der Winkeländerungen der Elasticitätsmodul beliebig gross angenommen werden.

Aufgabe 5. Gesucht der Horizontalschub X des bei A und B festgelagerten Bogenträgers in Fig. 62. Es handelt sich um den Einfluss einer der Reihe nach in sämmtlichen Knotenpunkten

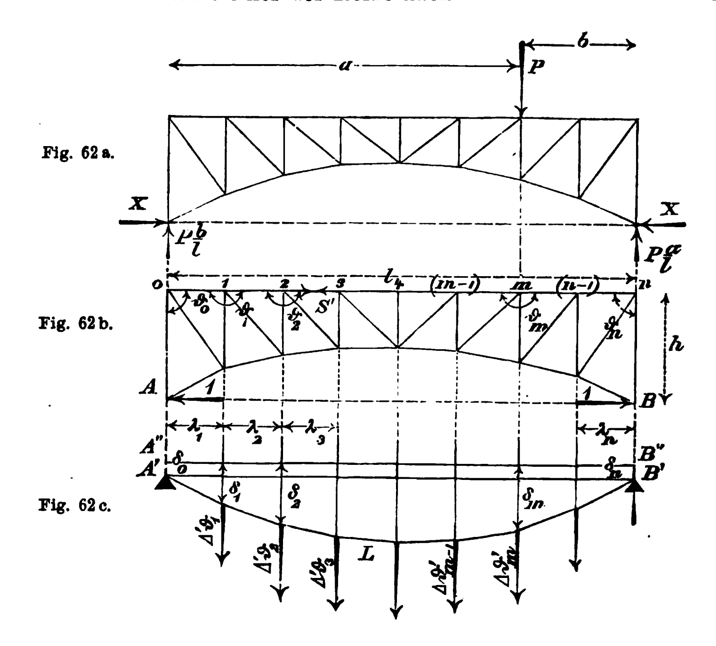


Fig. 62 a.

Fig. 62 b.

Fig. 62 c.

der oberen, wagerechten Gurtung angreifenden Last P, und gleichzeitig soll der Einfluss einer Aenderung der Anfangstemperatur und eines Nachgebens der Widerlager bestimmt werden.

Zuerst wird angenommen, dass auf das Fachwerk nur zwei in A und B angreifende, nach aussen gerichtete wagerechte Kräfte „Eins" wirken. Es entstehen Spannkräfte S', Spannungen σ' und Aenderungen $\Delta'\vartheta$ der oberen Randwinkel, und man erhält die entsprechende Biegungsfläche der oberen Gurtung, wenn man die den Lasten $\Delta'\vartheta_1$, $\Delta'\vartheta_2$, ... entsprechende Momentenfläche $A'LB'$ eines an den Enden A' und B' frei aufliegenden Balkens bestimmt und zu dieser das Trapez $A'A''B''B'$ hinzu-

fügt, dessen Endhöhen gleich den (ebenfalls für den Belastungszustand in Fig. 62 b berechneten) Verkürzungen δ_0 und δ_n der Endvertikalen sind.

Hierauf wird die dem Belastungszustande in Fig. 62 b entsprechende Verlängerung ξ der Sehne AB berechnet; sie ist nach § 7, Gleich. 18:

$$\text{(I)} \quad \xi = h\sum_0^n \Delta'\vartheta + \sum_1^n \sigma' \frac{\lambda}{E},$$

wobei sich die erste Summe über sämmtliche Randwinkeländerungen der oberen Gurtung erstreckt und die zweite die Spannungen σ' in sämmtlichen Stäben dieser Gurtung umfasst.

Nunmehr lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1) Die in A und B wirksamen wagerechten Kräfte 1 verschieben den Knotenpunkt m um δ_m senkrecht nach abwärts, mithin wird eine in m angreifende Last Eins eine Vergrösserung der Stützweite um δ_m hervorbringen, und eine in m angreifende Last P wird $\Delta l = P \cdot \delta_m$ erzeugen.

2) Der Horizontalschub X verursacht für sich allein

$$\Delta l = -X\xi.$$

3) Eine gleichmässige Aenderung der Anfangstemperatur sämmtlicher Stäbe um t bedingt

$$\Delta l = \varepsilon t l.$$

4) Soll sich bei gleichzeitigem Wirken von P und X sowie der Temperaturänderung die Stützweite l um einen vorgeschriebenen Werth Δl ändern, so besteht die Bedingung

$$\Delta l = P\delta_m - X\xi + \varepsilon t l,$$

und aus dieser ergiebt sich

$$\text{(II)} \quad X = \frac{P\delta_m + \varepsilon t l - \Delta l}{\xi}.$$

Insbesondere lautet also die Gleichung der gesuchten Einflusslinie für X:

$$X = \frac{P\delta_m}{\xi}.$$

Bei gleichem Materiale sämmtlicher Stäbe darf die Berechnung der $\Delta'\vartheta$ und der Strecke ξ unter der Annahme $E = 1$ erfolgen. Es muss dann in Gleich. II gesetzt werden:

εE an Stelle von ε und
$\Delta l E$ „ „ „ Δl.

Zahlenbeispiel zu Aufgabe 5. Es möge der bereits im § 3, Seite 22, für den Fall einer vollen Belastung untersuchte, in Fig. 26 dargestellte Bogenträger vorliegen. Die über den Träger wandernde Last $P = 1$ greife der Reihe nach in sämmtlichen Knotenpunkten der

oberen Gurtung an. In Fig. 26 geben die links von der Mitte an die Stäbe gesetzten Zahlen die Stablängen s in cm an und die Zahlen rechts von der Mitte die Stabquerschnitte F in qcm, während in Fig. 27 die in Tonnen ausgedrückten, durch die in A und B angreifenden Kräfte 1 erzeugten Spannkräfte S eingetragen sind.

In der (der Deutlichkeit der Zahlen wegen verzerrt gezeichneten) Trägerskizze in Fig. 63 bedeuten die an die Stäbe geschriebenen Zahlen die Spannungen $\sigma' = \frac{S'}{F}$ in Tonnen für das qdm und die in die Winkel gesetzten Zahlen die Kotangenten dieser Winkel. Aus diesen Zahlen ergeben sich — mit $E = 1$ — die folgenden Aenderungen der Randwinkel der oberen Gurtung (vergl. § 5, Gleich. 15, Seite 33):

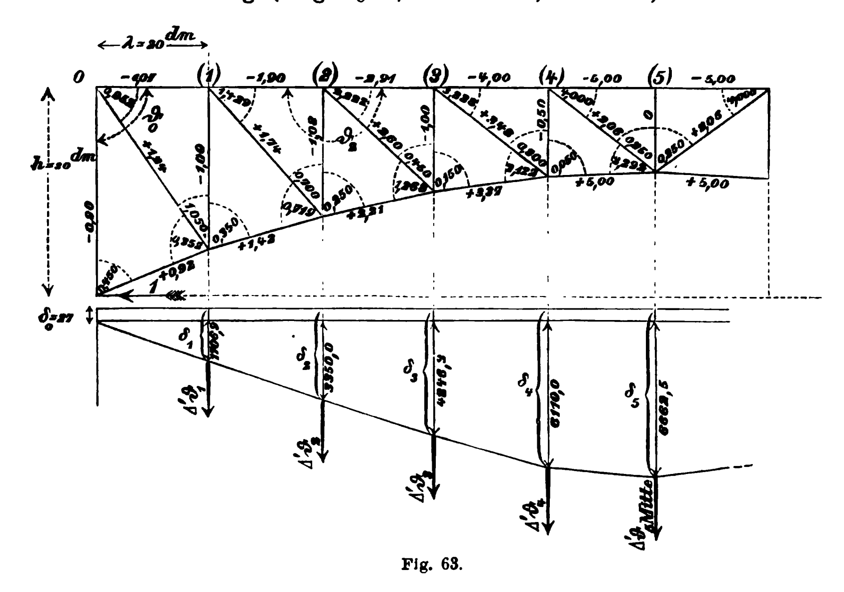


Fig. 63.

$\Delta'\vartheta_0 = (0,92 + 0,90)\ 0,450 + (0,92 - 1,24)\ 0,352 + (-1,00 - 1,24)\ 1,050 = -1,42$

$\Delta'\vartheta_1 = (1,24 + 1,07)\ 0,952 + (1,24 + 1,00)\ 1,050 + (1,42 + 1,00) 0,350 + (1,42 - 1,74) 0,719 + (-1,08 - 1,74) 0,700 = +3,19$

$\Delta'\vartheta_2 = (1,74 + 1,90)\ 1,429 + (1,74 + 1,08)\ 0,700 + (2,21 + 1,08) 0,250 + (2,21 - 2,60) 1,268 + (-1,00 - 2,60) 0,450 = +7,34$

$\Delta'\vartheta_3 = (2,60 + 2,91) \cdot 2,222 + (2,60 + 1,00)\ 0,450 + (3,37 + 1,00) 0,150 + (3,37 - 3,48) 2,122 + (-0,50 - 3,48) 0,300 = +11,63$

$\Delta'\mathfrak{J}_4 = (3{,}48 + 4{,}00)\ 3{,}333 + (3{,}48 + 0{,}50)\ 0{,}300 + (5{,}00 + 0{,}50)\ 0{,}050 + (5{,}00 - 2{,}06)\ 3{,}292 + (0 - 2{,}06)\ 0{,}250 = 35{,}56$

$\Delta'\mathfrak{J}_5 = [(2{,}06 + 5{,}00)\ 4{,}000 + (2{,}06 - 0)\ 0{,}250]\ 2 = 55{,}25$

und es folgt nach Gleich. I (wegen $h = 30\,\mathrm{dm}$ und $\lambda = 20\,\mathrm{dm}$)

$$\xi = 30\Sigma\Delta'\mathfrak{J} + 20\Sigma\sigma'$$
$$= 30\,[(-1{,}42 + 3{,}19 + 7{,}34 + 11{,}63 + 35{,}56)\,2 + 55{,}25]$$
$$+ 20\,[-1{,}07 - 1{,}90 - 2{,}91 - 4{,}00 - 5{,}00]\,2 = 4440{,}3.$$

Die Ordinaten des Momentenpolygones eines mit den Winkeländerungen $\Delta'\mathfrak{J}_1$, $\Delta'\mathfrak{J}_2$ . . . . . belasteten, einfachen Balkens $A'B'$ sind:

$$M_1 = 1706{,}9;\ M_2 = 3350{,}0;\ M_3 = 4846{,}3;$$
$$M_4 = 6110{,}0;\ M_5 = 6662{,}5;$$

fügt man zu ihnen die Verkürzung der Endvertikale, welche (für $E = 1$) gleich $(-\sigma'h) = 0{,}90 \cdot 30 = 27$ ist, so erhält man die dem Elasticitätsmodul $E = 1$ entsprechenden Ordinaten des Biegungspolygons der oberen Gurtung:

$$\delta_0 = 27;\ \delta_1\ 1733{,}9;\ \delta_2 = 3377{,}0;\ \delta_5 = 4873{,}3;$$
$$\delta_4 = 6137{,}0;\ \delta_5 = 6689{,}5,$$

und es ergeben sich jetzt die Ordinaten der gesuchten Einflusslinie für X:

$$X_0 = \frac{\delta_0}{\xi} = \frac{27}{4440{,}3} = 0{,}01$$

$$X_1 = \frac{\delta_1}{\xi} = \frac{1733{,}9}{4440{,}9} = 0{,}39 \text{ u. s. w.}$$

$$X_2 = 0{,}76;\ X_3 = 1{,}10;\ X_4 = 1{,}38;\ X_5 = 1{,}50.$$

Liegt nun beispielsweise der in Fig. 26 dargestellte Belastungsfall vor (Knotenpunktslasten 0,5 t und 1 t), so folgt

$$X = [0{,}5 \cdot 0{,}01 + 1{,}0\,(0{,}39 + 0{,}76 + 1{,}10 + 1{,}38)]\,2 + 1{,}0 \cdot 1{,}50 = 8{,}8\,\mathrm{t},$$

ein Ergebniss, welches mit dem auf Seite 23 erhaltenen übereinstimmt.

Der Einfluss einer Aenderung der Temperatur und einer Verschiebung der Widerlager ist

$$X = E\frac{\varepsilon t l - \Delta l}{\xi},$$

worein für Schmiedeeisen $E = 200\,000\,\mathrm{t}$ für das qdm und $\varepsilon = 0{,}000\,012$ zu setzen ist. Eine Erhöhung der Temperatur um $t = 40^0$ erzeugt (wegen $l = 200\,\mathrm{dm}$)

$$X = \frac{200\,000 \cdot 0{,}000\,012 \cdot 40 \cdot 200}{4440{,}3} = 4{,}3\,\mathrm{t}$$

und eine Verschiebung $\Delta l = 0{,}1\,\mathrm{dm}$ bedingt

$$X = -\frac{200\,000 \cdot 0{,}1}{4340{,}3} = -4{,}5\,\mathrm{t}.$$ (Vergl. Seite 25.)

§ 11.

Bemerkungen über die angenäherte Berechnung der statisch nicht bestimmbaren Grössen X ebener Fachwerkträger.

Die genaue Berechnung von neu zu entwerfenden, statisch unbesimmten Fachwerken wird durch den Umstand sehr erschwert, dass die Grössen X', X'', ... von den Querschnitten sämmtlicher Stäbe oder — wenn es sich nur um den Einfluss der Belastung handelt — von dem gegenseitigen Verhältnisse dieser Querschnitte abhängen. Es müssen deshalb die Querschnittsflächen zunächst abgeschätzt und hierauf an der Hand der Ergebnisse der schärferen Untersuchung geändert werden. Bei wesentlichen Abweichungen zwischen den so erhaltenen und zuerst angenommenen Querschnitten muss die ganze Rechnung wiederholt werden.

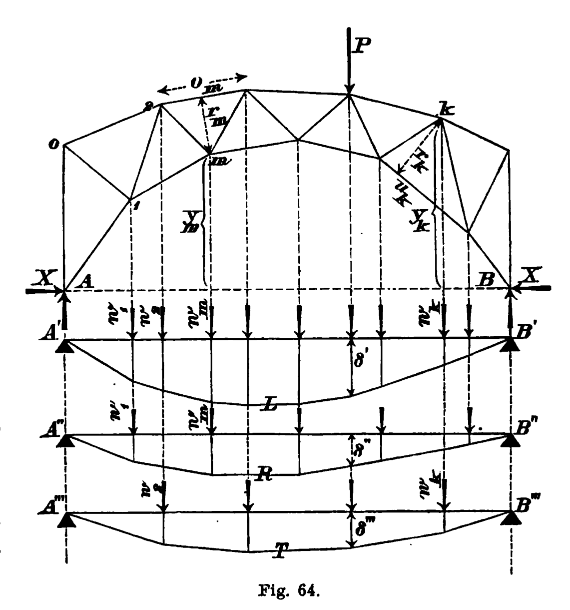


Fig. 64.

In sehr vielen, für die Praxis besonders wichtigen Fällen lässt sich nun eine wesentliche Abkürzung (ohne dass die Ergebnisse der Rechnung an Zuverlässigkeit einbüssen) dadurch erzielen, dass bei der Berechnung der Grössen X', X'' ..... die Formänderungen der Wandglieder des Hauptnetzes vernachlässigt und hinsichtlich der Querschnitte der Gurtungen vereinfachende Annahmen (z. B. Einführung eines gleichen Querschnittes für die Stäbe einer Gurtung) gemacht werden.

Ein Beispiel möge den Vorgang erläutern.

Es handele sich um die Berechnung der Einflusslinie für den Horizontalschub X des in Fig. 64 dargestellten Bogenträgers, dessen Spannkräfte, wie im § 3, auf die Form

$$S = S_0 - S'X$$

gebracht werden sollen. Die Spannkräfte S' entstehen, sobald $P = 0$ und $X = -1$ wird, und zur Berechnung von X dient die Gleichung:

$$X = \frac{\Sigma \frac{S' S_0 s}{EF}}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EE}} \text{ (vergl. § 3, Seite 23),}$$

wofür geschrieben werden darf (nach § 10):

$$X = \frac{P\delta'}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}},$$

wenn δ' die unter der Last P gemessene Ordinate des Biegungspolygons der oberen Gurtung für den Belastungsfall ($P = 0$ und $X = -1$) bedeutet. Dieses Polygon stimmt, wenn nur die Formänderungen der Gurtstäbe berücksichtigt werden sollen, mit dem Momentenpolygone $A'LB'$ eines einfachen Balkens $A'B'$ überein, auf den senkrechte Lasten

$$w_m = -\frac{\Delta' o_m \sec \beta_m}{h_m} = -\frac{\Delta' o_m}{r_m} \text{ (nach Gleich. 16 Seite 37)}$$

und

$$w_k = +\frac{\Delta' u_k \sec \gamma_k}{h_k} = +\frac{\Delta' u_k}{r_k} \text{ (nach Gleich. 17 Seite 37)}$$

wirken, welche beziehungsweise durch die Knotenpunkte der unteren und der oberen Gurtung gehen. Hierbei ist

r_m das Loth vom Knotenpunkte m auf den Stab o_m,
r_k „ „ „ „ k „ „ „ u_k.

In den Gurtstäben o_m und u_k entstehen im Belastungsfalle ($P = 0$ und $X = -1$) die mit Hilfe der Ritter'schen Methode leicht nachzuweisenden Spannkräfte:

$$O'_m = -1 \cdot \frac{y_m}{r_m} \text{ und } U'_k = +1 \cdot \frac{y_k}{r_k},$$

unter y_m und y_k die auf die Wagerechte AB bezogenen Ordinaten der Punkte m und k verstanden, und es folgt, wenn F_m und F_k die Querschnitte der Stäbe o_m und u_k bedeuten,

$$\Delta' o_m = \frac{O'_m o_m}{LF_m} \text{ und } \Delta' u_k = \frac{U'_k u_k}{EF_k} \text{ mithin}$$

$$w_m = \frac{y_m o_m}{EF_m r_m^2} \text{ und } w_k = \frac{y_k u_k}{EF_k r_k^2}.$$

Diese Werthe w darf man — ein konstantes E vorausgesetzt — ersetzen durch

$$w_m = \frac{y_m o_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m} \text{ und } w_k = \frac{y_k u_k}{r_k^2} \frac{F_c}{F_k},$$

wobei F_c eine beliebige Querschnittsfläche ist (vergl. § 3 Seite 21); nur muss man dann schreiben:

$$X = P \frac{\delta'}{\Sigma S'^2_s s \frac{F_c}{F}}.$$

Für einen Stab o_m der oberen Gurtung ist

$$S'^2_s s \frac{F_c}{F} = O'^2_m o_m \frac{F_c}{F_m} = \frac{y_m^2 o_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m} = y_m w_m,$$

und für einen Stab u_k der unteren Gurtung

$$S'^2_s s \frac{F_c}{F} = U'^2_k u_k \frac{F_c}{F_k} = \frac{y_k^2 u_k}{r_k^2} \frac{F_c}{F_k} = y_k w_k,$$

und es folgt, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$z_m = y_m w_m \text{ und } z_k = y_k w_k$$

$$X = P \frac{\delta'}{\Sigma z}.$$

Die Summe im Nenner des Werthes X erstreckt sich über alle Werthe z_m und z_k.

Es ist statthaft, für sämmtliche Stäbe der oberen Gurtung denselben Querschnitt F_o anzunehmen und für sämmtliche Stäbe der unteren Gurtung denselben Querschnitt F_u. Setzt man dann die willkürliche Querschnittfläche $F_c = F_o$, so ist für alle Stäbe o_m:

$$\frac{F_c}{F_m} = \frac{F_o}{F_o} = 1, \text{ mithin } w_m = \frac{y_m o_m}{r_m^2}$$

und für alle Stäbe u_k:

$$\frac{F_c}{F_k} = \frac{F_o}{F_u}, \text{ mithin } w_k = \frac{y_k u_k}{r_k^2} \frac{F_o}{F_u}$$

und es wird sich empfehlen:

1) ein Momentenpolygon $A''RB''$ zu zeichnen, entsprechend den durch die Knotenpunkte m der unteren Gurtung gehenden Lasten

$$w_m = \frac{y_m o_m}{r_m^2},$$

2) desgleichen ein Momentenpolygon $A'''TB'''$, entsprechend den durch die Knotenpunkte k der oberen Gurtung gehenden Lasten

$$w_k = \frac{y_k u_k}{r_k^2} \left(\text{statt } w_k = \frac{y_k u_k}{r_k^2} \cdot \frac{F_o}{F_u}\right),$$

3) die beiden Summen zu berechnen:

$$\Sigma_1 = \Sigma \frac{y_m^2 o_m}{r_m^2} \text{ und } \Sigma_2 = \Sigma \frac{y_k^2 u_k}{r_k^2},$$

aus denen sich dann

$$\Sigma z = \Sigma_1 + \frac{F_o}{F_u} \Sigma_2$$

ergiebt.

Sind nun δ'' und δ''' die unter der Last P gemessenen Ordinaten der Momentenpolygone $A''RB''$ und $A'''TB'''$, so ist offenbar

$$X = P \frac{\delta'' + \frac{F_o}{F_u}\delta'''}{\underset{1}{\Sigma} + \frac{F_o}{F_u}\underset{2}{\Sigma}},^{*)}$$

und man ist jetzt im Stande, für verschiedene Verhältnisse $\frac{F_o}{F_u}$ eine Reihe von Einflusslinien für X zu zeichnen und durch vergleichende Rechnungen festzustellen, welchen Einfluss die Wahl des Verhältnisses $\frac{F_o}{F_u}$ auf die Spannkräfte S besitzt.

Betont werde noch, dass in dem Falle einer von der Wagerechten wenig abweichenden oder mit dieser zusammenfallenden Gurtung unter $\frac{F_o}{F_u}$ das mittlere Verhältniss der Querschnitte der oberen und unteren Gurtstäbe in der Nähe des Scheitels zu verstehen ist, weil die Längenänderungen der hier gelegenen Gurtstäbe einen besonderen Einfluss auf X ausüben, und dass es sich bei der geringen Höhe, welche derartige Bogenträger in der Regel im Scheitel erhalten, empfiehlt (wenigstens für die erste Berechnung) $\frac{F_o}{F_u} = 1$ zu wählen.

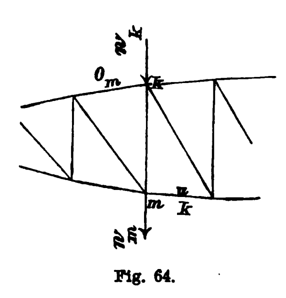


Fig. 64.

In gleicher Weise kann auch der Fachwerkbogen mit senkrechten Wandgliedern berechnet werden; hier fallen je zwei Lasten w in dieselbe Senkrechte, Fig. 64.

§ 12.

Die Lehrsätze über die Formänderungsarbeit.

1. Der Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit. Wir betrachten ein statisch unbestimmtes Fachwerk mit spannungslosem Anfangszustande, nehmen an, dass der anfängliche Temperaturzustand bestehen bleibt, dass also die Aenderungen der Stablängen durch die

---

*) Der Horizontalschub infolge einer gleichmässigen Erhöhung der Anfangstemperatur um t wird, nach § 3, Seite 23 u. 25,

$$X = \frac{\varepsilon E F_c t l}{\Sigma S'^2_s \frac{F_c}{F}} = \frac{\varepsilon E F_o t l}{\underset{1}{\Sigma} + \frac{F_o}{F_u}\underset{2}{\Sigma}}.$$

Gleichung $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$ gegeben sind und setzen festliegende oder über reibungslose Lager gleitende Stützpunkte voraus. Es sind dann sämmtliche Verschiebungen $\Delta c = 0$, und die statisch nicht bestimmbaren Grössen $X', X'', X''' \ldots\ldots$ haben (nach Seite 17) den Gleichungen zu genügen:

$$(24)\begin{cases} \Sigma \frac{\partial S}{\partial X'} \Delta s = \Sigma \frac{\partial S}{\partial X'} \cdot \frac{Ss}{EF} = 0 \\ \Sigma \frac{\partial S}{\partial X''} \Delta s = \Sigma \frac{\partial S}{\partial X''} \cdot \frac{Ss}{EF} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

welche man durch die Forderung ersetzen darf:

Es müssen die Grössen $X', X'', \ldots\ldots$ den Ausdruck

$$A = \Sigma \frac{S^2 s}{2EF} \textit{ zu einem Minimum machen.}$$

In der That stimmen die aus der Bedingung $A = minimum$ gefolgerten Gleichungen

$$\frac{\partial A}{\partial X'} = \Sigma \frac{\partial S}{\partial X'} \cdot \frac{Ss}{EF} = 0$$
$$\frac{\partial A}{\partial X''} = \Sigma \frac{\partial S}{\partial X''} \cdot \frac{Ss}{EF} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

mit den Gleichungen 24 überein.*)

Der Werth A lässt sich in einfacher Weise deuten. Verlängert sich ein Fachwerkstab unter dem Einflusse einer von 0 bis S wachsenden Spannkraft allmählich um die Strecke $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$, so wird er in dem Augenblicke, in welchem die Verlängerung den zwischen 0 und Δs liegenden Werth x erreicht hat, durch die Kraft $S_x = \frac{EFx}{s}$ gespannt. Schreitet die Verlängerung um dx fort, so leistet S_x die Arbeit

$$S_x \cdot dx = \frac{EF}{s} x dx,$$

und es ist somit die gesammte Formänderungsarbeit des Stabes:

---

*) Dass A ein Minimum und nicht ein Maximum wird, lehrt die Untersuchung des zweiten Differentialquotienten. Es ist $\frac{\partial A}{\partial X'} = \Sigma \frac{Ss}{EF} \cdot \frac{\partial S}{\partial X'} = \Sigma \frac{Ss}{EF} S'$ und $\frac{\partial^2 A}{\partial X'^2} = \Sigma \frac{S's}{EF} \cdot \frac{\partial S}{\partial X'} = \Sigma \frac{S'^2 s}{EF}$, also positiv.

$$\frac{EF}{s}\int_0^{\Delta s} x\,dx = \frac{EF}{s}\frac{(\Delta s)^2}{2} = \frac{EF}{2s}\left(\frac{Ss}{EF}\right)^2 = \frac{S^2 s}{2EF},$$

und diejenige des Fachwerks

$$A = \Sigma \frac{S^2 s}{2EF}.$$

Es folgt mithin der hinsichtlich seiner Giltigkeit an die im Eingange dieses Paragraphen gemachten Annahmen $\Delta c = 0$ und $t = 0$ und an die Voraussetzung eines spannungslosen Anfangszustandes gebundene Satz:

Werden die Spannkräfte S eines statisch unbestimmten Fachwerks als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $X', X'', \ldots.$ aufgefasst, so müssen den Grössen X diejenigen Werthe beigelegt werden, welche die Formänderungsarbeit A zu einem Minimum machen.

2. Der Satz von der Abgeleiteten der Formänderungsarbeit. Die Arbeitsgleichung eines Fachwerks lautet bei festliegenden oder über reibungslose Lager gleitenden Stützpunkten (vergl. § 4, Gleich. 10)

$$P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + \ldots. + P_m\delta_m + \ldots. + P_n\delta_n = \Sigma S\Delta s;$$

sie gilt für beliebige, genügend kleine, zusammengehörige Verschiebungen δ und Δs und für beliebige Werthe der Lasten P, und es dürfen somit bei der theilweisen Differentiation dieser Gleichung nach P_m sämmtliche δ und Δs sowie alle Lasten P_1 bis P_{m-1} und P_{m+1} bis P_n als Konstanten aufgefasst werden. Es ergiebt sich

$$\delta_m = \Sigma \frac{\partial S}{\partial P_m}\Delta s$$

und, wenn $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$ ist, wenn also die dem spannungslosen Anfangszustande entsprechenden Temperaturen ungeändert bleiben,

$$\delta_m = \Sigma \frac{\partial S}{\partial P_m}\cdot\frac{Ss}{EF} = \frac{\partial\left(\Sigma \frac{S^2 s}{2EF}\right)}{\partial P_m} \text{ d. i.}$$

$$(25)\quad \delta_m = \frac{\partial A}{\partial P_m}.$$

Für den Fall: $\Delta c = 0$ und $t = 0$ und unter der Voraussetzung eines spannungslosen Anfangszustandes gilt somit der Satz:

Die Verschiebung δ_m des Angriffspunktes m einer Last P_m im Sinne von P_m ist gleich der nach P_m gebildeten theilweisen Abgeleiteten der Formänderungsarbeit A des Fachwerks.

Bei der Anwendung dieses Satzes ist zu beachten, dass man die Spannkräfte in den überzähligen Stäben und die überzähligen Stützenwiderstände stets als Lasten auffassen darf, welche auf das Hauptnetz wirken. Es ist aus diesem Grunde zulässig, unter A nur die Form-

änderungsarbeit für die dem statisch bestimmten Hauptnetze angehörigen Stäbe zu verstehen und $\frac{\partial S}{\partial P_m} = \frac{\partial S_o}{\partial P_m}$ zu setzen, d. h. bei der Berechnung der Abgeleiteten $\frac{\partial A}{\partial P_m}$ die Grössen X als Konstanten zu betrachten.

Die Ausdehnung von A über das ganze Fachwerk, entsprechend dem Wortlaute des oben gegebenen Satzes, und die Behandlung der X als Funktionen der Lasten P führt natürlich zu demselben Ergebnisse. Man muss dann setzen:

$$\frac{\partial S}{\partial P_m} = \frac{\partial S_o}{\partial P_m} + S' \frac{\partial X'}{\partial P_m} + S'' \frac{\partial X''}{\partial P_m} + \dots\dots$$

und, da für X stets Ausdrücke von der Form

$$X' = z_1' P_1 + z_2' P_2 + \dots\dots + z_m' P_m + \dots\dots$$
$$X'' = z_1'' P_1 + z_2'' P_2 + \dots\dots + z_m'' P_m + \dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

gefunden werden, wobei sämmtliche z von den P unabhängige Werthe sind,

$$\frac{\partial S}{\partial P_m} = \frac{\partial S_o}{\partial P_m} + S' z_m' + S'' z_m'' + \dots\dots$$

und

$$\delta_m = \Sigma \frac{Ss}{EF} \frac{\partial S_o}{\partial P_m} + z_m' \Sigma \frac{S' Ss}{EF} + z_m'' \Sigma \frac{S'' Ss}{EF} + \dots\dots$$

Nun ist aber $\Sigma S' \Delta s = 0$, $\Sigma S'' \Delta s = 0$, ... (vergl. Seite 9),

$$\text{d. h. } \Sigma \frac{S' Ss}{EF} = 0, \ \Sigma \frac{S'' Ss}{EF} = 0, \dots\dots$$

und es ergiebt sich, genau wie bei der obigen Auffassung,

$$\delta_m = \Sigma \frac{Ss}{EF} \frac{\partial S_o}{\partial P_m}.$$

3. Berücksichtigung einer Aenderung des Temperaturzustandes. Aendert sich die Anfangstemperatur in allen Punkten eines Fachwerkstabes um den gleichen, gegebenen Betrag t, so ist

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s,$$

und es gehen die Gleichungen 24, denen die Grössen X bei festliegenden oder über reibungslose Lager gleitenden Stützpunkten genügen müssen, über in

$$(26) \quad \begin{cases} \Sigma \frac{\partial S}{\partial X'} \left(\frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s \right) = 0 \\ \Sigma \frac{\partial S}{\partial X''} \left(\frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s \right) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots ; \end{cases}$$

sie führen zu dem für den Fall $\Delta c = 0$ und bei Bestehen eines spannungslosen Anfangszustandes giltigen Satze:

Die statisch nicht bestimmbaren Grössen X müssen den Ausdruck

$$(27)\quad A_t = \Sigma \frac{S^2 s}{2EF} + \Sigma \varepsilon t S s$$

zu einem Minimum machen.)*

Die für die Verschiebung δ_m des Angriffspunktes m der Last P_m im Sinne von P_m abgeleitete Gleichung

$$\delta_m = \Sigma \frac{\partial S}{\partial P_m} \Delta s$$

geht über in

$$\delta_m = \Sigma \frac{\partial S}{\partial P_m}\left(\frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s\right) = \frac{\partial\left(\Sigma \frac{S^2 s}{2EF} + \Sigma \varepsilon t S s\right)}{\partial P_m}$$

und führt zu dem hinsichtlich seiner Giltigkeit an dieselben Voraussetzungen wie der Satz $A_t =$ Minimum gebundenen Satze:

$$(28)\quad \delta_m = \frac{\partial A_t}{\partial P_m},$$

bei dessen Benutzung wieder zu beachten ist, dass die Grössen X als Konstanten aufgefasst werden dürfen, sobald A_t theilweise nach P_m differentiirt wird, und dass sich mithin der Ausdruck A_t nur über die dem Hauptnetze angehörigen Stäbe zu erstrecken braucht.

4. **Berücksichtigung von Verschiebungen der Stützpunkte bei Anwendung der unter 1 bis 3 aufgestellten Sätze.** Es verdient noch besonders hervorgehoben zu werden, dass die für den Fall $\Delta c = 0$ abgeleiteten Sätze $A_t = minimum$ und $\delta_m = \frac{\partial A_t}{\partial P_m}$ die Berechnung der Grössen X und der Verschiebungen δ auch dann ermöglichen, wenn sich die Angriffspunkte der Auflagerkräfte C bei der Formänderung des Fachwerks verschieben. Die Kräfte C dürfen nämlich nach § 1 stets als die Spannkräfte in Stäben aufgefasst werden, welche gleiche Richtung wie die Kräfte C haben und die Stützpunkte mit ausserhalb des Fachwerks gelegenen festen Punkten (zuweilen auch mit festen Punkten des Fachwerks selbst) verbinden. Werden diesen Auflagerstäben solche Eigenschaften beigelegt, dass ihre Längenänderungen mit den vorgeschriebenen Verschiebungen Δc der Stützpunkte übereinstimmen, so sind sie als den Stützen vollkommen gleichwerthig aufzufassen, und man hat, wenn die Verschiebungen Δc bei der Berechnung der X und δ berücksichtigt werden sollen, nur nöthig, den Ausdruck A_t auf die Auflagerstäbe mit auszudehnen, wobei für jeden Auflagerstab ein beliebiger Elasticitätsmodul und ein beliebiger Querschnitt angenommen werden darf.

Bedeutet nun für einen Auflagerstab:

c die Länge, E_c den Elasticitätsmodul,
F_c den Querschnittsinhalt, t_c die Temperaturänderung,
ε_c den Ausdehnungskoefficienten für $t_c = 1$,

---

*) Es ist $\frac{\partial^2 A_t}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial X^2}$, also positiv.

so ist $\Delta c = \frac{Cc}{E_c F_c} + \varepsilon_c t_c c$. Mit $E_c F_c = \infty$ wird $\Delta c = \varepsilon_c t_c c$, d. i. unabhängig von C, und man erhält:

$$A_i = \Sigma \frac{S^2 s}{2EF} + \Sigma \varepsilon t S s + \Sigma C \Delta c,$$

wobei Δc als eine Konstante zu betrachten ist.

Beispiel. Handelt es sich um den Horizontalschub X des in Fig. 26, Seite 22 dargestellten Bogenträgers, dessen Stützweite l sich um Δl ändern möge, so denke man die Kämpfergelenke A und B durch einen Stab verbunden, in welchem die Spannkraft X wirksam ist und mache

$$A_i = \Sigma \frac{S^2 s}{2EF} + \Sigma \varepsilon t S s + X \cdot \Delta l$$

zu einem Minimum. Es ergiebt sich die Gleichung

$$\Sigma \frac{\partial S}{\partial X} \cdot \frac{Ss}{EF} + \Sigma \varepsilon t s \frac{\partial S}{\partial X} + \Delta l = 0.$$

Ist (wie im § 3, Seite 22) $S = S_0 - XS'$, so folgt $\frac{\partial S}{\partial X} = -S'$ und

$$-\Sigma S'(S_0 - XS') \frac{s}{EF} - \Sigma \varepsilon t s S' + \Delta l = 0,$$

und hieraus ergiebt sich, wie auf Seite 23,

$$X = \frac{\Sigma S' S_0 \frac{s}{EF} + \Sigma \varepsilon t S' s - \Delta l}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}}.$$

Abschnitt II.

Biegungsfestigkeit gerader und einfach gekrümmter Stäbe.

§ 13.

Allgemeine Gesetze für Stäbe, deren Querschnittsabmessungen im Verhältniss zu den Krümmungshalbmessern klein sind.

1) **Arbeitsgleichung.** Wird ein Stab, dessen Schwerpunktsachse AB eine Linie einfacher Krümmung ist, durch äussere Kräfte angegriffen, welche in der die Linie AB enthaltenden Ebene (Kräfteebene, Stabebene) liegen, so besitzen, bei im Verhältniss zur Länge des Stabes geringen Querschnittsabmessungen, ausser den Temperaturänderungen nur die senkrecht zu den Querschnittstheilchen wirkenden Spannungen (Normalspannungen) σ einen wesentlichen Einfluss auf die Formänderung. Der Stab lässt sich, bei Vernachlässigung aller übrigen Spannungen, in unendlich kleine, annähernd prismatische Theilchen zer-

legen, welche durch der Stabachse parallele Spannkräfte S auf Zug oder auf Druck beansprucht werden (Fig. 66).

Bedeutet

F die im Allgemeinen veränderliche Querschnittsfläche des Stabes,

ds die Länge des zwischen den unendlich nahen Querschnitten I und II gelegenen Elementes der Stabachse,

ds_v die dem Bogenelemente ds parallele Länge irgend eines der zwischen I und II gedachten, unendlich kleinen Prismen,

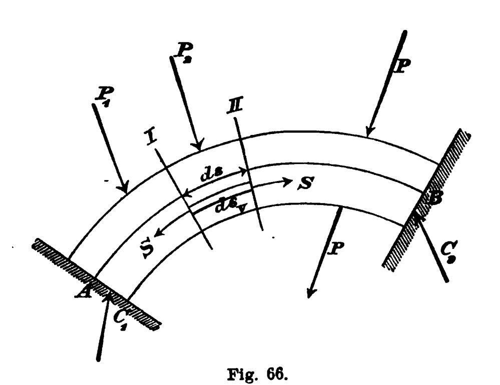


Fig. 66.

σ die Normalspannung für den Endquerschnitt dF dieses Prismas,

Δds_v die Strecke, um welche sich ds_v infolge irgend einer geringen Verbiegung des Stabes ändert,

so ist
$$S = \sigma dF,$$

und es ergiebt sich, mit Vernachlässigung der Aenderungen der Querschnittsabmessungen, die virtuelle Formänderungs-Arbeit

$$\int S \cdot \Delta ds_v = \int \sigma \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV, \text{ wobei}$$
$$dV = ds_v dF$$

den Inhalt des Stabtheilchens bedeutet. Bezeichnet nun, wie im Abschnitte I auf Seite 16:

P eine Last,

C eine Auflagerkraft,

δ die durch jene Δds_v bedingte Verschiebung des Angriffspunktes von P im Sinne von P,

Δc die durch jene Δds_v bedingte Verschiebung des Angriffspunktes von C im Sinne von C,

und wird angenommen, dass die äusseren und inneren Kräfte miteinander im Gleichgewichte sind, so folgt, wenn die Gewichte der Stabtheilchen zu den Lasten gerechnet wenden, aus dem Satze von den virtuellen Verschiebungen die Arbeitsgleichung:

$$(28) \quad \Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c = \int \sigma \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV,$$

welche für beliebige mögliche Verschiebungen δ, Δc und Δds_v gilt,

sobald diese nur klein genug sind, um als verschwindende Grössen aufgefasst werden zu dürfen.

In den meisten Fällen der Anwendung handelt es sich um Stäbe, deren Querschnittsabmessungen, verglichen mit den Krümmungshalbmessern r, so gering sind, dass es zulässig ist, $ds_v = ds$ zu setzen und die Spannungen σ genau so zu berechnen, als sei an der betrachteten Stelle $r = \infty$, d. h. der Stab gerade. Wir wollen auch (ausgenommen sind die genaueren Entwicklungen im § 22) mit dieser vereinfachenden Annahme rechnen, trotzdem aber die Bezeichnung ds_v beibehalten, um die Verschiedenheit der Lagen, nicht der Längen, der Stabtheilchen zu kennzeichnen.

2) **Bedingungsgleichungen zur Berechnung statisch nicht bestimmbarer Grössen.** Unter gewissen vereinfachenden Annahmen gelingt es mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen, die Spannungen σ ebenso wie die Auflagerkräfte C als geradlinige Funktionen der gegebenen Lasten P und gewisser statisch nicht bestimmbarer Grössen X', X'', X''' ..... darzustellen; sie erscheinen dann in den für beliebige Werthe der P und X giltigen Formen:

$$(29) \quad \begin{cases} \sigma = \sigma_0 + \sigma' X' + \sigma'' X'' + \sigma''' X''' + \ldots\ldots \\ C = C_0 + C' X' + C'' X'' + C''' X''' + \ldots\ldots, \end{cases}$$

wobei σ', σ'', σ''' ....., C', C'', C''' gegebene, von den Lasten P und den Grössen X unabhängige Koefficienten sind, während σ_0 und C_0 die als geradlinige Funktionen der Kräfte P darstellbaren Spannungen und Auflagerkräfte für denjenigen statisch bestimmten Belastungszustand bedeuten, welcher entsteht, sobald alle statisch nicht bestimmbaren Grössen X verschwinden.

Wird $X' = 1$ angenommen, und werden gleichzeitig alle Lasten P, sowie die übrigen statisch nicht bestimmbaren Grössen X'', X''', ... gleich Null gesetzt, so entsteht ein Belastungsfall, welcher „Zustand $X' = 1$" heissen soll, und welchem die Spannungen σ' und Auflagerkräfte C' entsprechen, und in gleicher Weise soll in der Folge von Zuständen $X'' = 1$ oder $X''' = 1$ u. s. w. gesprochen werden.

Die Arbeitsgleichung für den Zustand $X' = 1$ bildet einen besonderen Fall der Arbeitsgleichung (28); sie ergiebt sich aus jener, sobald $P = 0$, $C = C'$ und $\sigma = \sigma'$ gesetzt wird und lautet:

$$(30) \quad \begin{cases} \Sigma C' \Delta c = \int \sigma' \dfrac{\Delta ds_v}{ds_v}\, dV, \\ \text{und ganz entsprechend wird gefunden:} \\ \Sigma C'' \Delta c = \int \sigma'' \dfrac{\Delta ds_v}{ds_v}\, dV, \\ \Sigma C''' \Delta c = \int \sigma''' \dfrac{\Delta ds_v}{ds_v}\, dV, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Gleichungen (30), deren Anzahl mit derjenigen der Unbekannten X übereinstimmt, ermöglichen die Berechnung dieser Grössen; man hat nur nöthig, sie auf die wirklichen elastischen Verschiebungen Δc und Δds_v anzuwenden. Die Δc werden meistens geschätzt (vergl. § 3, Seite 8) und die Δds_v unter der Voraussetzung eines spannungslosen Anfangszustandes als Funktionen der Spannungen σ und Temperaturänderungen t dargestellt. Es ist dann nach Gleich. (8):

$$(31)\quad \frac{\Delta ds_v}{ds_v} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t,$$

und es folgen somit die Bedingungsgleichungen:

$$(32)\quad \begin{cases} L' = \int \frac{\sigma' \sigma}{E} dV + \int \varepsilon t \sigma' dV \\ L'' = \int \frac{\sigma'' \sigma}{E} dV + \int \varepsilon t \sigma'' dV \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

in denen $L' = \Sigma C' \Delta c$, $L'' = \Sigma C'' \Delta c \ldots\ldots$ die virtuellen Arbeiten der beziehungsweise den Zuständen $X' = 1$, $X'' = 1$ u. s. w. entsprechenden Auflagerkräfte bedeuten.

Bringt man die dem wirklichen Belastungszustande entsprechende virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte auf die Form

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}' X' + \mathfrak{A}'' X'' + \mathfrak{A}''' X''' + \ldots\ldots,$$

wobei $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$.... Grössen vorstellen, welche von den Werthen X und (mit Ausnahme von $\mathfrak{A}_0$) von den Lasten P unabhängig sind, so ist:

$$L' = \mathfrak{A}',\ L'' = \mathfrak{A}'',\ \ldots\ldots$$

Beachtet man nun, dass

$$\sigma' = \frac{\partial \sigma}{\partial X'},\ \sigma'' = \frac{\partial \sigma}{\partial X''},\ \ldots\ldots$$

ist, so sieht man ein, dass die Gleichung:

$$(33)\quad L = \int \frac{\sigma}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial X} dV + \int \varepsilon t \frac{\partial \sigma}{\partial X} dV,$$

welche auch unmittelbar durch theilweise Differentiation der Gleich. (28) erhalten werden kann, als allgemeine Form der Bedingungsgleichungen (32) aufgefasst werden darf; man braucht nur X der Reihe nach durch X', X''.... zu ersetzen, um die Gleichungen (32) zu erhalten. L bedeutet die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand $X = 1$.

Führt man die Bezeichnung ein:

$$(34)\quad A_i = \int \frac{\sigma^2 dV}{2E} + \int \varepsilon t \sigma dV,$$

so kann man Gleich. (33) noch kürzer schreiben:

$$(35)\quad L = \frac{\partial A_i}{\partial X}.$$

Für den besonderen Fall festliegender oder über reibungslose Lager gleitender Stützen verschwindet die Arbeit L, und es ergiebt sich die Bedingung

$$(I)\quad \frac{\partial A_i}{\partial X} = 0, \text{ also } A_i = \text{minimum}.$$

Ist ausser $L = 0$ auch $t = 0$, so folgt

$$(II)\quad \int \frac{\sigma^2 d V}{2E} = \text{minimum},$$

wobei $\int \frac{\sigma^2 d V}{2E}$ die Formänderungsarbeit für den Fall $t = 0$ vorstellt. Die vorstehenden Sätze (I) und (II) entsprechen den für das Fachwerk im § 12 unter 3 bezieh. 1 abgeleiteten; sie ergeben sich sofort aus jenen, sobald die Spannkraft S des Fachwerkstabes ersetzt wird durch σdF, der Stab-Inhalt sF durch dV und das Zeichen Σ durch das Zeichen $\int$.

3) **Bestimmung der Verschiebung δ irgend eines in der Kräfteebene gelegenen Punktes des Stabes nach irgend einer in die Kräfteebene fallenden Richtung.** Werden die auf den Stab wirkenden Lasten mit $P_1, P_2 \ldots\ldots P_m \ldots\ldots P_n$ bezeichnet, die Angriffspunkte derselben mit $1, 2, \ldots m \ldots n$ und die Verschiebungen dieser Punkte im Sinne der entsprechenden P mit $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_m \ldots\ldots \delta_n$, so lautet die Arbeitsgleichung:

$$P_1\delta_1 + P_2\delta_2 \ldots + P_m\delta_m + \ldots\ldots + P_n\delta_n + \Sigma C\Delta c = \int \sigma \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV;$$

sie gilt für beliebige zusammengehörige Verschiebungen δ, Δc und Δds_v und für beliebige Werthe der Lasten P und statisch nicht bestimmbaren Grössen X und liefert unmittelbar einen einfachen Ausdruck für die Verschiebung δ_m, sobald sämmtliche Grössen X sowie die Lasten P_1 bis P_{m-1} und P_{m+1} bis P_n gleich Null gesetzt werden, während $P_m = 1$ angenommen wird. Es entsteht dann ein statisch bestimmter Stab, welcher der Hauptträger genannt werden möge, und an welchem ausser $P_m = 1$ noch die durch diese Last hervorgerufenen Auflagerkräfte $\overline{C}$ angreifen, während im Innern gewisse Spannungen $\overline{\sigma}$ erzeugt werden. Die obige Arbeitsgleichung geht über in

$$(36)\quad \delta_m + \Sigma\overline{C}\Delta c = \int \overline{\sigma} \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV$$

und gestattet, die durch einen beliebigen Belastungs- und Temperaturzustand verursachte Verschiebung δ_m aus den diesem Zustande entsprechenden Verschiebungen Δc und Δds_v zu berechnen. Insbesondere ergiebt sich mit

$$\frac{\Delta ds_v}{ds_v} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t$$

der Werth

$$(37)\quad \delta_m = \int \overline{\sigma} \left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon t \right) dV - \overline{L},$$

wobei $\overline{L}$ die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den durch $P_m = 1$ belasteten Hauptträger bezeichnet.

Denselben Ausdruck für δ_m erhält man — in anderer Form — durch theilweise Differentiation der allgemeinen Arbeitsgleichung nach der Last P_m, wobei die δ, Δc und Δds_v als Konstanten aufgefasst werden dürfen, da jene Arbeitsgleichung für beliebige zusammengehörige Werthe dieser Verschiebungen giltig ist. Man gelangt zu

$$\delta_m + \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c = \int \frac{\partial \sigma}{\partial P_m} \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV = \int \frac{\partial \sigma}{\partial P_m} \left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon t \right) dV$$

und findet schliesslich das übersichtliche Gesetz:

$$(38)\quad \delta_m = \frac{\partial A_i}{\partial P_m} - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c,$$

wobei A_i durch die Gleich. 34 erklärt ist.

Bei festliegenden oder über reibungslose Lagerflächen gleitenden Stützpunkten verschwinden sämmtliche Δc; es ergiebt sich

$$\delta_m = \frac{\partial A_i}{\partial P_m}$$

und im Falle $\Delta c = 0$ und $t = 0$ folgt

$$\delta_m = \frac{\partial A}{\partial P_m},$$

wobei $A = \int \frac{\sigma^2 dV}{2E}$ die Formänderungsarbeit bedeutet.

Mit Hilfe der entwickelten Gesetze ist man auch im Stande, die Verschiebungen von solchen Punkten eines Stabes zu bestimmen, welche nicht Angriffspunkte von Lasten sind; man hat nur nöthig, in dem fraglichen Punkte nach der Richtung der gewünschten Verschiebung eine beliebig grosse Last P hinzuzufügen und nachträglich $P = 0$ zu setzen. Bedingung ist nur, dass die Verschiebungsrichtung in die Kräfteebene fällt.

Bedient man sich bei der Berechnung von δ der Gleichung (38), so ist zu beachten, dass nicht nur die Lasten P, sondern auch die Grössen X als unabhängige Veränderliche aufgefasst werden dürfen, dass es also zulässig ist, die X als Konstanten anzusehen, sobald nach einer Last P differentiirt wird. Vergl. Seite 68.

4) **Auflager.** Ausser den im § 1 (Fig. 1) angeführten festen und beweglichen Lagern, deren Widerstände beziehungsweise durch die Angabe von zwei Seitenkräften oder einer Seitenkraft bestimmt sind, müssen bei den auf Biegungsfestigkeit beanspruchten Stäben noch Auf-

lager unterschieden werden, welche der im Stützpunkte an die Stabachse gelegten Tangente eine bestimmte Lage, beziehungsweise Bewegung, vorschreiben. Es kommen zwei Anordnungen in Betracht.

a) Feste Einspannung (Fig. 67). Bei vollkommener Starrheit des stützenden Körpers liegt der Stützpunkt A fest, desgleichen die in A an die Stabachse gelegte Tangente (Auflagertangente). Der Stützenwiderstand lässt sich zerlegen in zwei Seitenkräfte C_1 und C_2 und in ein Kräftepaar, dessen Moment M das Einspannungs-Moment heisst.

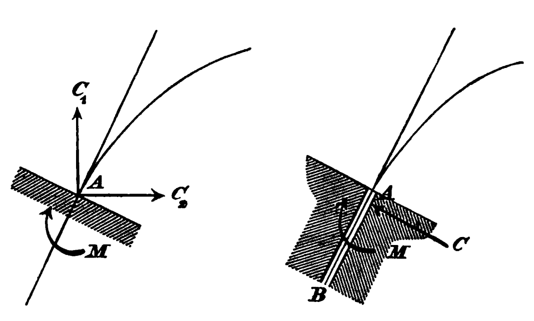


Fig. 67. Fig. 68.

Verschiebt sich, infolge der Elasticität des stützenden Körpers, der Punkt A im Sinne von C_1 um Δc_1 und im Sinne von C_2 um Δc_2, während sich die Auflagertangente im Sinne des Momentes M um τ dreht, so leisten die Auflagerkräfte die virtuelle Arbeit.

$$C_1 \Delta c_1 + C_2 \Delta c_2 + \mathrm{M}\tau.\text{*)}$$

b) Lose Einspannung (Fig. 68). Der Stützpunkt A gleitet auf vorgeschriebener Bahn AB. Die Auflagertangente liegt bei starrem Stützkörper fest. Der Stützenwiderstand zerfällt in das Einspannungsmoment M und in einen Gegendruck C, welcher bei glatter Bahn senkrecht zu AB wirkt. Verschiebt sich A im Sinne von A um Δc, während sich die Auflagertangente im Sinne von M um τ dreht, so leisten die Auflagerkräfte die virtuelle Arbeit

$$C \Delta c + \mathrm{M}\tau.$$

c) Beispiel für die Berechnung der Arbeiten L. Um die Ermittelung der in den Gleichungen 32 vorkommenden Arbeiten L', L'', ... der Auflagerkräfte für die Zustände $X' = 1$, $X'' = 1$, ... durch ein Beispiel zu erläutern, betrachten wir einen bei A und B fest eingespannten Bogenträger ohne Gelenke (Fig. 69). Die senkrechten und wagerechten Seitenkräfte der Stützen-

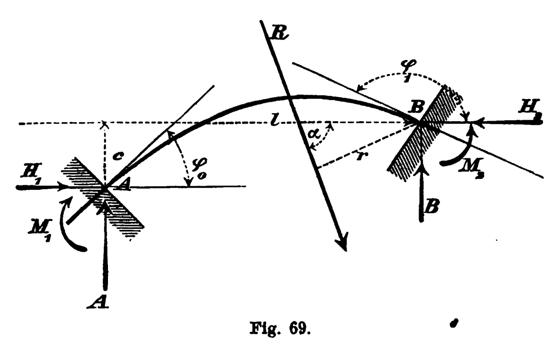


Fig. 69.

*) Hinsichtlich der Arbeit des Momentes M vergl. Seite 52.

drücke seien A, B, H_1, H_2, und die Einspannungsmomente seien M_1 und M_2. Infolge der Nachgiebigkeit der Widerlager gehe über

$$c \text{ in } c + \Delta c,\ l \text{ in } l + \Delta l,\ \varphi_0 \text{ in } \varphi_0 + \Delta\varphi_0,\ \varphi_1 \text{ in } \varphi_1 + \Delta\varphi_1;$$

es leisten dann die Auflagerkräfte (wenn Punkt B und die Wagerechte durch B festliegen) die virtuelle Arbeit

$$\text{(I)}\quad \mathfrak{A} = -A\Delta c - H_1\Delta l - M_1\Delta\varphi_0 + M_2\Delta\varphi_1.$$

Bedeutet R die Mittelkraft aus sämmtlichen Lasten, α den Neigungswinkel von R gegen die Wagerechte, r das Loth von B auf R, so bestehen die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\text{(II)}\quad H_1 + R\cos\alpha - H_2 = 0$$
$$\text{(III)}\quad A - R\sin\alpha + B = 0$$
$$\text{(IV)}\quad Al - H_1 c - Rr + M_1 - M_2 = 0.$$

Da sich weitere statische Beziehungen zwischen den 6 Unbekannten A, B, H_1, H_2, M_1 und M_2 nicht aufstellen lassen, so ist der Träger ein dreifach statisch unbestimmter. Werden A, H_1 und M_1 als statisch nicht bestimmbare Grössen aufgefasst, so muss der aus (IV) sich ergebende Werth: $M_2 = Al - H_1 c - Rr + M_1$ in (I) eingeführt werden, worauf die Arbeit $\mathfrak{A}$ als Funktion der statisch nicht bestimmbaren Grössen in der Form

$$\mathfrak{A} = A(l\Delta\varphi_1 - \Delta c) - H_1(c\Delta\varphi_1 + \Delta l) + M_1(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_0) - Rr\Delta\varphi_1$$

erhalten wird, und es folgt schliesslich

für den Zustand $X' = A = 1$ der Werth $L' = l\Delta\varphi_1 - \Delta c$
„ „ „ $X'' = H_1 = 1$ „ „ $L'' = -(c\Delta\varphi_1 + \Delta l)$
„ „ „ $X''' = M_1 = 1$ „ „ $L''' = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_0$.

5) **Belastung durch Kräftepaare. Drehung von Tangenten an die Stabachse.** Die in irgend einem Punkte m an die Stabachse gelegte Tangente TT (Fig. 70) können wir als starre Linie auffassen, welche mit dem Stabe fest verbunden ist. Wirkt auf diese Linie ein Kräftepaar, dessen Moment $= \mathfrak{M}_m$ ist, so werden an den Auflagern gewisse Gegendrücke und im Stabe gewisse Spannungen hervorgerufen. Es möge m der Angriffspunkt des Kräftepaares heissen.

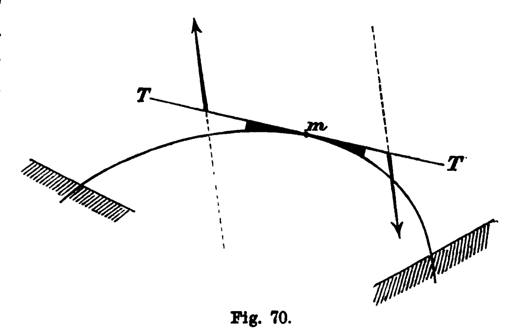


Fig. 70.

Denken wir uns nun in gleicher Weise (ausser den bislang vorausgesetzten Lasten P) in beliebigen Punkten 1, 2, ... n der Stabachse Kräftepaare mit den Momenten $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... $\mathfrak{M}_n$ angreifend und bezeichnen mit τ_1, τ_2, ... τ_n die Winkel, um welche sich die in den Punkten 1, 2, ... n an die Stabachse gelegten Tangenten infolge der Umgestaltung des elastischen Stabes drehen, so leisten die Kräftepaare die virtuelle Arbeit $\mathfrak{M}_1\tau_1 + \mathfrak{M}_2\tau_2 + \ldots + \mathfrak{M}_n\tau_n$, und es ergiebt sich die Arbeitsgleichung:

$$\Sigma P\delta + \mathfrak{M}_1\tau_1 + \mathfrak{M}_2\tau_2 + \ldots \mathfrak{M}_m\tau_m + \ldots \mathfrak{M}_n\tau_n + \Sigma C\Delta c$$
$$= \int \sigma \frac{\Delta d s_v}{d s_v} d V.$$

Sie gilt im Falle des Gleichgewichtes und bei verschwindend kleinen, möglichen Verschiebungen für beliebige Werthe der Lasten P und Momente $\mathfrak{M}_m$ und liefert, theilweise nach $\mathfrak{M}_m$ differentiirt, die Beziehung:

$$\tau_m + \Sigma \frac{\partial C}{\partial \mathfrak{M}_m} \Delta c = \int \frac{\partial \sigma}{\partial \mathfrak{M}_m} \frac{\Delta d s_v}{d s_v} d V,$$

aus welcher sich die (der Gleich. 38 gegenüberzustellende) Gleichung

$$(38\text{a}) \quad \tau_m = \frac{\partial A_i}{\partial \mathfrak{M}_m} - \Sigma \frac{\partial C}{\partial \mathfrak{M}_m} \Delta c$$

ableiten lässt; dieselbe ermöglicht die Berechnung des Drehungswinkels τ jeder Tangente an die Stabachse. Tritt das Kräftepaar mit dem Momente $\mathfrak{M}_m$ in Wirklichkeit nicht auf, so hat man nach Ausführung der Differentiation $\mathfrak{M}_m = 0$ zu setzen.

Weiter leuchtet sofort die Richtigkeit der (der Gleich. 37 gegenüberzustellenden) Gleichung ein:

$$(37\text{a}) \quad \tau_m = \int \bar{\sigma} \left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon t \right) d V - \bar{L},$$

in welcher $\bar{\sigma}$ diejenige Spannung bedeutet, die in irgend einem Querschnittselemente des statisch bestimmten Hauptträgers entsteht, sobald im Punkte m ein Kräftepaar mit dem Momente $\mathfrak{M}_m = 1$ angreift, während $\bar{L}$ die virtuelle Arbeit der durch diese Belastung hervorgerufenen Auflagerkräfte vorstellt.

§ 14.

Die Spannungen σ im geraden Stabe. Navier'sche Biegungsformel.

1) Durch einen Querschnitt im Abstande x von irgend einem in der Stabachse angenommenen Anfangspunkte A denken wir den Stab in zwei Theile zerlegt und vereinigen alle an dem einen der beiden Theile, z. B. an dem linken, angreifenden äusseren Kräfte zu ihrer Mittelkraft R (Fig. 71).

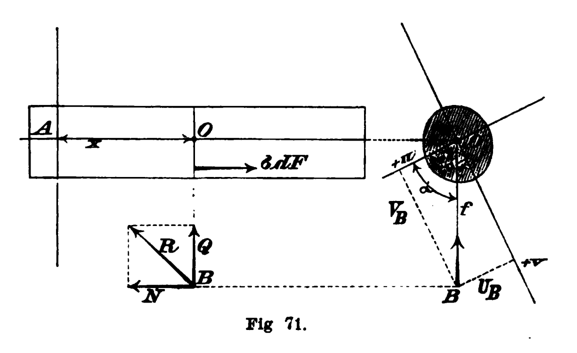


Fig 71.

R heisst die äussere Kraft für den fraglichen Querschnitt und zerfällt in die Längskraft N, senkrecht zum Querschnitte, und die Querkraft Q in der Ebene des Querschnittes. Wird vorausgesetzt, dass alle äusseren Kräfte die Stabachse treffen (wenn auch in unendlicher Ferne) so geht Q durch den Schwerpunkt O des Querschnitts. Die Kraft N möge positiv angenommen werden, sobald sie das Bestreben hat, den linken Stabtheil von dem festgehalten gedachten rechten Theile zu entfernen.

Die durch den Schwerpunkt O des Querschnittes und den Schnittpunkt B der Kraft R mit dem Querschnitte gelegte Gerade heisse die Kraftlinie, sie möge mit der u-Achse eines in der Querschnittsebene angenommenen rechtwinkligen Achsenkreuzes (u, v), dessen Ursprung der Punkt O ist, den Winkel α einschliessen. Bedeuten dann:

f den Abstand des Punktes B vom Ursprunge,

u_B und v_B die Koordinaten von B,

so zerfällt das dem betrachteten Querschnitte entsprechende Biegungsmoment

$$\mathrm{M} = Nf$$

in das um die u-Achse drehende Moment

$$\mathrm{M}_u = N v_B = \mathrm{M} \sin \alpha$$

und in das um die v-Achse drehende Moment

$$\mathrm{M}_v = N u_B = \mathrm{M} \cos \alpha,$$

und es bestehen zwischen den in dem Querschnitte wirksamen Spannungen σ und den äusseren Kräften die Gleichgewichtsbedingungen:

$$N = \int \sigma dF$$

$$\mathrm{M}_u = \int v \cdot \sigma dF$$

$$\mathrm{M}_v = \int u \cdot \sigma dF.$$

Die Berechnung der σ soll unter folgenden Voraussetzungen durchgeführt werden:

1. Die Strecke Δdx_v, um welche sich im Punkte u, v die Entfernung dx des betrachteten Querschnittes von dem unendlich nahe gelegenen Querschnitte ändert, sei eine geradlinige Funktion der Koordinaten u und v, d. h. es sei

$$\frac{\Delta dx_v}{dx} = a' + a'' v + a''' u,$$

unter a', a'', a''' Werthe verstanden, welche für den betrachteten Querschnitt Konstanten sind.*)

2. Die Temperaturänderung t im Punkte u, v sei ebenfalls eine geradlinige Funktion von u und v, es bestehe also die Gleichung

$$t = t' + t''v + t'''u,$$

deren Koefficienten gegeben sind, sobald die Temperaturänderungen für drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte des Querschnittes bekannt sind.

Dann folgt aus der Gleichung

$$\frac{\Delta dx_v}{dx} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t$$

für die Spannung σ der Ausdruck

$$\sigma = E(a' - \varepsilon t') + E(a'' - \varepsilon t'')v + E(a''' - \varepsilon t''')u.$$

und hierfür soll kürzer geschrieben werden

$$\sigma = a + bv + cu$$

wobei a, b, c Konstanten sind, welche sich mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen berechnen lassen. Jene Bedingungen gehen über in

$$N = a\int dF + b\int v\,dF + c\int u\,dF$$

$$M_u = a\int v\,dF + b\int v^2 dF + c\int uv\,dF$$

$$M_v = a\int u\,dF + b\int uv\,dF + c\int u^2 dF;$$

sie nehmen eine besonders einfache Gestalt an, sobald zu den Koordinatenachsen Hauptachsen gewählt werden. In diesem Falle ist das Centrifugalmoment $\int uv\,dF = 0$, und weiter folgt, da der Ursprung O mit dem Schwerpunkte des Querschnittes zusammenfällt, $\int u\,dF = 0$ und $\int v\,dF = 0$. Es ergeben sich die Werthe:

$$a = \frac{N}{F},\quad b = \frac{M_u}{\int v^2 dF} = \frac{M_u}{J_u},\quad c = \frac{M_v}{\int u^2 dF} = \frac{M_v}{J_v},$$

in denen J_u und J_v die Trägheitsmomente des Querschnittes in Bezug

*) Es stimmt diese Annahme mit der bekannten Voraussetzung Navier's überein, dass ursprünglich ebene Querschnitte des Stabes auch nach der Biegung Ebenen sind. Die Zuverlässigkeit der Navier'schen Methode ist durch die Arbeiten von Saint-Venant (in Liouville's Journal 1856), Kirchhoff (in Crelle's Journal 1859) und namentlich von Pochhammer (in dessen Werke über das Gleichgewicht des elastischen Stabes, Kiel, 1879) nachgewiesen worden.

auf die Hauptachsen bedeuten, und es entsteht die **Navier**'sche Formel

$$(39) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_u}{J_u} v + \frac{M_v}{J_v} u.$$

Besonders hervorzuheben ist, dass eine ungleichmässige Erwärmung des Stabes nach dem Gesetze $t = t' + t'' v + t''' u$ nur dann Spannungen σ hervorbringt, wenn die Werthe N und M von den Temperaturänderungen abhängig sind, was nur bei statisch unbestimmten Stäben der Fall sein kann. Verschwinden alle äusseren Kräfte, so verschwinden auch die Spannungen σ.

Wir führen nun eine neue Achse u' ein, Fig. 72, welche mit der Kraftlinie den Winkel $(\alpha + \beta)$ bildet, so zwar dass

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{J_u}{J_v} \operatorname{cotg} \alpha$$

ist. Dann geht Gleich. 39, nach Einführung von $M_u = M \sin \alpha$ und $M_v = M \cos \alpha$ über in

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M \sin \alpha}{J_u} \left(v + u \operatorname{cotg} \alpha \frac{J_u}{J_v} \right)$$

$$= \frac{N}{F} + \frac{M \sin \alpha}{J_u} \left(v + u \operatorname{tg} \beta \right)$$

und hierfür darf man schreiben:

$$(40a) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M v'}{J_u}$$

wo v' den Abstand des durch die Spannung σ beanspruchten Querschnittstheilchens von der Achse u' bedeutet.

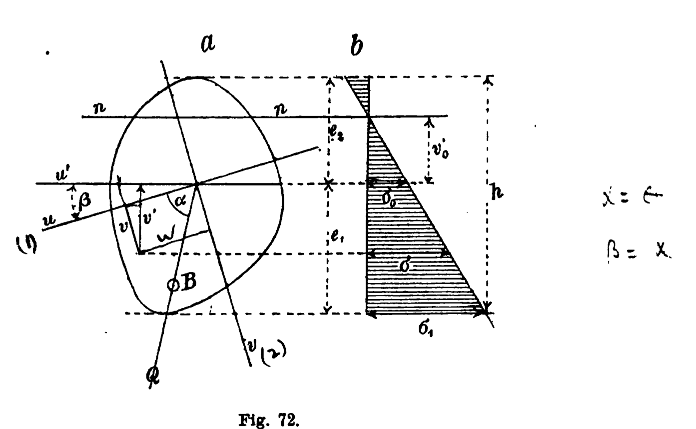


Fig. 72.

Man erkennt, dass alle Querschnittstheilchen, welche von der u'-Achse gleichen Abstand haben, ein und dieselbe Beanspruchung σ erfahren und gelangt zu der in Fig. 72b angegebenen übersichtlichen Darstellung der Spannungen σ mittels einer Geraden. Den Punkten der u'-Achse entspricht

$$\sigma_0 = \frac{N}{F},$$

und die durch die Bedingung $\sigma = 0$ bestimmte Spannungs-Nulllinie ergiebt sich im Abstande

$$v_0' = -\frac{NJ_u'}{M_u F} = -\frac{J_u'}{fF}$$

von der u'-Achse. Für die von der u'-Achse am entferntesten gelegenen Querschnittspunkte findet man, wenn $v' = +e_1$ und $v' = -e_2$ die Ordinaten dieser Punkte sind, die Spannungen

$$(41) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{N}{F} + \dfrac{M e_1}{J_u} \text{ und} \\ \sigma_2 = \dfrac{N}{F} - \dfrac{M e_2}{J_u}. \text{*)} \end{cases}$$

2) Setzt man in Gleich. (39)

$$M_u = N v_B \text{ und } M_v = N u_B$$

und bezeichnet man die Koordinaten der Stelle A, (Fig. 72) für welche die Spannung σ infolge der in B angreifenden Kraft N berechnet werden soll, mit v_A, u_A, so erhält man, — wenn diese Spannung σ_{AB} genannt wird —

$$(42) \quad \sigma_{AB} = \frac{N}{F}\left(1 + \frac{F}{J_u} v_B v_A + \frac{F}{J_v} u_B u_A\right),$$

und in dieser Gleichung sind die Buchstaben B und A vertauschbar. Man findet nämlich für die Spannung an der Stelle B infolge einer in A angreifenden Kraft N den Werth

$$\sigma_{BA} = \frac{N}{F}\left(1 + \frac{F}{J_u} v_A v_B + \frac{F}{J_v} u_B u_A\right)$$

und gelangt zu der Beziehung

$$\sigma_{AB} = \sigma_{BA}.$$

Es seien nun für irgend einen Querschnitt (Fig. 73) die Spannungen bestimmt, welche eine in einem Querschnittspunkte B angreifende Kraft $N = 1$ hervorruft, und zwar seien diese Spannungen nach dem unter 1) angegebenen Verfahren durch eine Gerade $B'B''$ dargestellt. Die Spannung an der Stelle A ist dann gleich der Ordinate σ_{AB}, welche die $B'B''$ auf einer durch den Punkt A parallel zur Spannungs-Nulllinie gezogenen Geraden g abschneidet; und ebenso gross ist auch (nach Gleich. 45) die Spannung σ_{BA}, welche eine in A an-

*) Ein zeichnerisches Verfahren zur Ermittlung der Spannungen, bei welchem die Lage der Querschnittshauptachsen nicht bekannt zu sein braucht, ist in des Verfassers Graphischer Statik, Band I, Seite 52, angegeben.

greifende Kraft $N = 1$ bei B hervorruft. Eine in A wirksame Kraft N wird also an der Stelle B die Spannung

$$\sigma_B = N \cdot \sigma_{AB}$$

hervorrufen, und dieser Werth σ bleibt ungeändert, wenn sich der Angriffspunkt A von N in der Geraden g bewegt. Greifen mehrere Kräfte N am Querschnitte an, so erhält man für die Spannung an der Stelle B einen Werth

$$\sigma_B = \Sigma N \sigma_{AB}.$$

Die Gerade $B'B''$ ist also die Einflusslinie für die Spannung σ an der Stelle B.

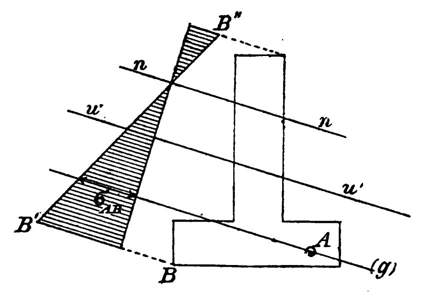


Fig. 73.

Wird der Einfluss eines Momentes M gesucht, welches in einer den Querschnitt in der Geraden $l - l$ schneidenden, zum Querschnitte rechtwinkligen Ebene wirkt, Fig. 74, so ersetze man dasselbe durch ein Kräftepaar Na mit beliebig grossem Arme a und lege den Angriffspunkt der einen der beiden Gegenkräfte N in den Schnittpunkt der Geraden $l - l$ und $n - n$. Man findet dann nach Fig. 74:

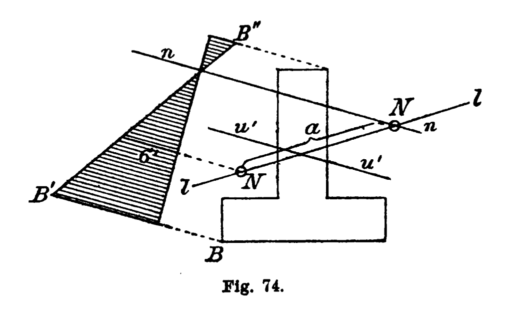


Fig. 74.

$$\sigma_B = N\sigma' = \frac{M\sigma'}{a}.$$

3) Meistens fällt die Kraftlinie mit einer Hauptachse zusammen. Wir wählen dann die Kraftlinie zur v-Achse, bezeichnen das Trägheitsmoment für die u-Achse kurz mit J und erhalten:

$$(40\text{b}) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J}.$$

Wird angenommen, dass die Temperaturänderung t von u unabhängig ist, so darf

$$(43) \quad t = t_0 + \Delta t \frac{v}{h}$$

gesetzt werden; hierbei bedeutet (Fig. 75):

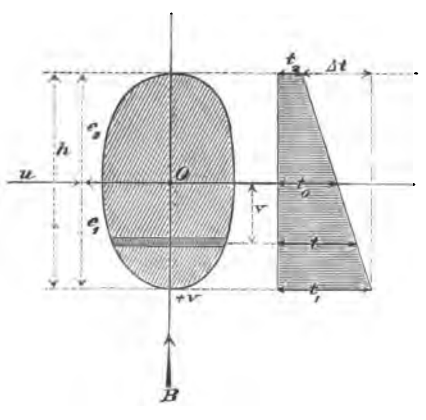


Fig. 75.

h die Höhe des Querschnittes,

t_0 die Temperaturänderung für $v = 0$ (also z. B. für den Querschnittsschwerpunkt),

$\Delta t = t_1 - t_2$ den Unterschied der den äussersten Querschnittspunkten entsprechenden Temperaturänderungen,

t_1 den Werth von t für $v = + e_1$ und

t_2 den Werth von t für $v = - e_2$.

Zwischen t_0, t_1 und t_2 besteht die Beziehung

$$t_0 = t_1 \frac{e_2}{h} + t_2 \frac{e_1}{h}.$$

Die Werthe Δdx_1, Δdx_2 und Δdx, welche Δdx_v, beziehungsweise für $v = + e_1$, $v = - e_2$ und $v = 0$ annimmt, sind

$$\Delta dx_1 = dx \left(\frac{\sigma_1}{E} + \varepsilon t_1\right) = dx \left[\frac{N}{EF} + \frac{Me_1}{EJ} + \varepsilon t_1\right]$$

$$\Delta dx_2 = dx \left(\frac{\sigma_2}{E} + \varepsilon t_2\right) = dx \left[\frac{N}{EF} - \frac{Me_2}{EJ} + \varepsilon t_2\right]$$

$$(44) \quad \Delta dx = dx \left(\frac{N}{EF} + \varepsilon t_0\right)$$

und es wird deshalb der Winkel $d\tau$, um welchen sich der betrachtete Stabquerschnitt gegen den Nachbarquerschnitt dreht,

$$d\tau = \operatorname{tg} d\tau = \frac{\Delta dx_1 - \Delta dx_2}{h}, \text{ d. i.}$$

$$(45) \quad d\tau = dx \left(\frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{\Delta t}{h}\right).$$

Die Gleichung (45) gilt übrigens auch für den Fall einer nicht mit der Hauptachse zusammenfallenden Kraftlinie, vorausgesetzt, dass sich t nur mit v' ändert und h die zur u'-Achse rechtwinklige Querschnittshöhe bedeutet. Gleichung (44) gilt allgemein, wenn t_0 die Temperaturänderung im Querschnittsschwerpunkte ist.

§ 15.

Bedingungsgleichungen für statisch unbestimmte gerade Stäbe.

1) Integrationen. Es sollen die im § 13 abgeleiteten Bedingungsgleichungen zunächst für den Fall umgeformt werden, dass die Kraftlinie mit der v-Achse zusammenfällt, dass also

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{\mathrm{M} v}{J}$$

ist, während die Temperaturänderung dem durch die Gleich. 42 und 43 gegebenen Gesetze folgt. Zu diesem Zwecke mögen die Integrale

$$\int \frac{\sigma_a \sigma_b \, d V}{E} \quad \text{und} \quad \int \sigma \varepsilon t \, d V$$

berechnet werden, wobei

$$\sigma_a = \frac{N_a}{F} + \frac{\mathrm{M}_a v}{J} \quad \text{und} \quad \sigma_b = \frac{N_b}{F} + \frac{\mathrm{M}_b v}{J}$$

die Spannungen für irgend zwei durch die Zeiger a und b unterschiedene Belastungsfälle bedeuten.

Mit $d V = dx \, dF$ ergiebt sich

$$\int \frac{\sigma_a \sigma_b \, d V}{E} = \iint \left(\sigma_b \frac{N_a}{F} + \sigma_b \frac{\mathrm{M}_a v}{J} \right) \frac{dx \, dF}{E}$$

$$= \int \frac{N_a dx \int \sigma_b dF}{EF} + \int \frac{\mathrm{M}_a dx \int \sigma_b v \, dF}{EJ}$$

und mit Beachtung der Gleichgewichtsbedingungen

$$\int \sigma_b dF = N_b \quad \text{und} \quad \int \sigma_b v \, dF = \mathrm{M}_b$$

$$\int \frac{\sigma_a \sigma_b \, d V}{E} = \int \frac{N_a N_b \, dx}{EF} + \int \frac{\mathrm{M}_a \mathrm{M}_b \, dx}{EJ}. \tag{46}$$

Ebenso findet man

$$\int \sigma \varepsilon t \, d V = \iint \sigma \left(t_0 + \Delta t \frac{v}{h} \right) \varepsilon \, dx \, dF$$

$$= \int \varepsilon t_0 dx \int \sigma dF + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} dx \int \sigma v \, dF$$

$$\int \sigma \varepsilon t \, d V = \int \varepsilon t_0 N dx + \int \varepsilon \Delta t \frac{\mathrm{M}}{h} dx. \tag{47}$$

2) Umformung der Gleichungen (32). Die Auflagerkräfte C, Biegungsmomente M und Längskräfte N eines mehrfach statisch unbestimmten Stabes lassen sich in der Form darstellen

$$(48)\quad \begin{cases} C = C_0 + C'X' + C''X'' + C'''X''' + \ldots\ldots \\ \mathrm{M} = \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}'X' + \mathrm{M}''X'' + \mathrm{M}'''X''' + \ldots\ldots \\ N = N_0 + N'X' + N''X'' + N'''X''' + \ldots\ldots, \end{cases}$$

wobei X', X'', X''', ... statisch nicht bestimmbare Grössen bedeuten.

C_0, M_0, N_0 sind die Auflagerkräfte, Biegungsmomente und Längskräfte für den statisch bestimmten Hauptträger, in welchen der Stab übergeht, sobald sämmtliche Unbekannten X verschwinden; sie sind geradlinige Funktionen der gegebenen Lasten.

C', M', N' sind die Werthe der Auflagerkräfte, Momente und Längskräfte für den auf Seite 72 erklärten Zustand $X' = 1$, desgl. C'', M'', N'' die Werthe für den Zustand $X'' = 1$ u. s. w.

Die Spannungen für den Zustand $X' = 1$ sind:

$$\sigma' = \frac{N'}{F} + \frac{\mathrm{M}'v}{J},$$

für den Zustand $X'' = 1$:

$$\sigma'' = \frac{N''}{F} + \frac{\mathrm{M}''v}{J}, \text{ u. s. w.}$$

und die Gleichungen (32) gehen, mit Beachtung der Gleich. (46) und (47), über in

$$(49)\quad \begin{cases} L' = \int \frac{N'N}{EF}dx + \int \frac{\mathrm{M}'\mathrm{M}}{EJ}dx + \int \varepsilon t_0 N'dx + \int \varepsilon \Delta t \frac{\mathrm{M}'}{h}dx \\ L'' = \int \frac{N''N}{EF}dx + \int \frac{\mathrm{M}''\mathrm{M}}{EJ}dx + \int \varepsilon t_0 N''dx + \int \varepsilon \Delta t \frac{\mathrm{M}''}{h}dx \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

wobei L', L'', ... die virtuellen Arbeiten der Auflagerkräfte bei Eintreten der Zustände $X' = 1$, $X'' = 1$, ... bedeuten.

Ist die Temperaturerhöhung für alle Punkte eines Stabquerschnittes konstant und $= t$, so ist $\Delta t = 0$ und $t_0 = t$ zu setzen.

3) Umformung der Gleichungen (33) und (34). Für den durch die Gleich. 34 gegebenen Arbeitsausdruck A_i findet man mit Hilfe der Gleichungen (46) und (47) den Werth

$$(50)\quad A_i = \int \frac{N^2 dx}{2EF} + \int \frac{\mathrm{M}^2 dx}{2EJ} + \int \varepsilon t_0 N dx + \int \varepsilon \Delta t \frac{\mathrm{M}}{h} dx,$$

und es geht somit die Bedingungsgleichung (33) über in

$$(51)\quad L=\int\frac{N}{EF}\cdot\frac{\partial N}{\partial X}\,dx+\int\frac{M}{EJ}\cdot\frac{\partial M}{\partial X}\,dx+\int\varepsilon t_0\,\frac{\partial N}{\partial X}\,dx$$
$$+\int\varepsilon\,\frac{\Delta t}{h}\cdot\frac{\partial M}{\partial X}\,dx,$$

wobei X irgend eine der zu berechnenden statisch nicht bestimmbaren Grössen und L die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand $X=1$ bedeutet.

Dass Gleich. (51) die allgemeine Form der Bedingungsgleichungen (49) darstellt, leuchtet ein, sobald der Grösse X der Reihe nach die Werthe X', X'' ...... beigelegt werden und

$$\frac{\partial M}{\partial X}=M',\ \frac{\partial M}{\partial X''}=M''\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial N}{\partial X'}=N',\ \frac{\partial N}{\partial X''}=N''\ldots.$$

gesetzt wird.

4) Der auf Biegungsfestigkeit beanspruchte gerade Stab in Verbindung mit einem Fachwerke. Sehr häufig hat man es mit der Berechnung eines Körpers zu thun, der aus einem Fachwerke und aus einem oder mehreren auf Biegungsfestigkeit beanspruchten, geraden Stäben besteht. Die allgemeine Form der Bedingungsgleichungen, denen die statisch nicht bestimmbaren Grössen X zu genügen haben, lautet dann (vergleiche die für das Fachwerk abgeleiteten Gleichungen 26):

$$(52)\quad L=\int\frac{N}{EF}\cdot\frac{\partial N}{\partial X}\,dx+\int\frac{M}{EJ}\cdot\frac{\partial M}{\partial X}\,dx+\int\varepsilon t_0\,\frac{\partial N}{\partial X}\,dx$$
$$+\int\varepsilon\,\frac{\Delta t}{h}\cdot\frac{\partial M}{\partial X}\,dx+\Sigma\,\frac{Ss}{EF}\cdot\frac{\partial S}{\partial X}+\Sigma\varepsilon ts\,\frac{\partial S}{\partial X},$$

wobei angenommen wird, dass die Temperaturänderung t für alle Punkte eines und desselben Fachwerkstabes gleich gross ist.

Meistens macht man die Annahme, dass auch für alle Punkte eines und desselben Querschnittes der durch die M und N beanspruchten Stäbe die Temperaturänderung t gleich gross ist und erhält dann die Bedingung

$$(53)\quad L=\int\frac{N}{EF}\cdot\frac{\partial N}{\partial X}\,dx+\int\frac{M}{EJ}\cdot\frac{\partial M}{\partial X}\,dx+\int\varepsilon t\,\frac{\partial N}{\partial X}\,dx$$
$$+\Sigma\,\frac{Ss}{EF}\cdot\frac{\partial S}{\partial X}+\Sigma\varepsilon ts\,\frac{\partial S}{\partial X}.$$

L bedeutet die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand $X=1$.

5) Die im Vorstehenden abgeleiteten Gesetze gelten auch für den Fall einer nicht mit einer Hauptachse zusammenfallenden Kraftlinie,

vorausgesetzt, dass sich t nur mit v' ändert, dass unter h die Querschnittshöhe rechtwinklig zur u-Achse verstanden wird und für J das auf die u-Achse bezogene Trägheitsmoment J_u gesetzt wird. Liegen jedoch die Kraftlinien der verschiedenen Querschnitte oder die u-Achsen nicht in einer Ebene, so ist es zweckmässiger, die Momente M_u und M_v (§ 14, 1) einzuführen und das Integral

$$\int \frac{\sigma_a \sigma_b d V}{E}$$

auf Grund der Formeln

$$\sigma_a = \frac{N_a}{F} + \frac{M_{ua} v}{J_u} + \frac{M_{va} u}{J_v}$$
$$\sigma_b = \frac{N_b}{F} + \frac{M_{ub} v}{J_u} + \frac{M_{vb} u}{J_v}$$

zu berechnen. Man erhält mit $dV = dx dF$

$$\int \frac{\sigma_a \sigma_b d V}{E} = \int \frac{N_a dx \int \sigma_b dF}{EF} + \int \frac{M_{ua} dx \int \sigma_b v dF}{EJ_u}$$
$$+ \int \frac{M_{va} dx \int \sigma_b u dF}{EJ_v}$$

und mit Beachtung der Gleichgewichtsbedingungen

$$\int \sigma_b dF = N_b, \quad \int \sigma_b v dF = M_{ub}, \quad \int \sigma_b u dF = M_{vb}$$

die Beziehung:

$$\int \frac{\sigma_a \sigma_b d V}{E} = \int \frac{N_a N_b dx}{EF} + \int \frac{M_{ua} M_{ub} dx}{EJ_u} + \int \frac{M_{va} M_{vb} dx}{EJ_v}.$$

Für das Integral $\int \sigma \varepsilon t d V$ liefert die Voraussetzung der allgemeinen Beziehung

$$t = t' + t'' v + t''' u$$

den Werth

$$\int \sigma \varepsilon t d V = \int \varepsilon t' N dx + \int \varepsilon t'' M_u dx + \int \varepsilon t''' M_v dx.$$

Hiernach ist es leicht, die unter 2), 3), 4) abgeleiteten Gesetze für den allgemeineren Fall zu erweitern. Beispielsweise geht der Ausdruck (50) für A_i über in

$$\text{50a)} \quad A_i = \int \frac{N^2 dx}{2EF} + \int \frac{M_u^2 dx}{2EJ_u} + \int \frac{M_v^2 dx}{2EJ_v}$$
$$+ \int \varepsilon t' N dx + \int \varepsilon t'' M_u dx + \int \varepsilon t''' M_v dx.$$

6) Anwendungen.*)

Aufgabe 1. Wagerechter, bei B eingespannter und bei A frei aufliegender Balken. Gesucht ist der durch eine gleichmässige Belastung, p für die Längeneinheit, hervorgerufene Auflagerwiderstand X (Fig. 76). Temperaturänderungen sollen unberücksichtigt bleiben, desgleichen Verschiebungen der Angriffspunkte der Auflagerkräfte; es ist also $L = 0$ und $t = 0$.

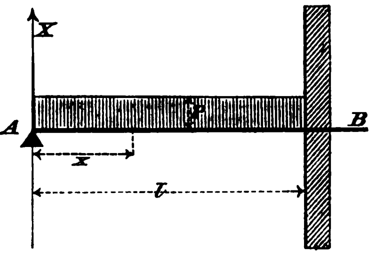


Fig. 76.

Da nur Beanspruchung auf Biegung vorliegt ($N = 0$), so muss X der Bedingung (vergl. Gleich. 51)

$$\int_0^l \frac{\mathrm{M}}{EJ} \cdot \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X}\, dx = 0$$

genügen, und bei konstantem EJ der Bedingung

$$\int_0^l \mathrm{M} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X}\, dx = 0.$$

Nun ist $\mathrm{M} = Xx - \frac{px^2}{2}$ und $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X} = x$, weshalb

$$\int_0^l \left(Xx - \frac{px^2}{2}\right) x\,dx = \frac{Xl^3}{3} - \frac{pl^4}{8} = 0,$$

woraus

$$X = \frac{3pl}{8}.$$

Es ist mithin das Biegungsmoment an der Stelle x

$$\mathrm{M} = \frac{3pl}{8} x - \frac{px^2}{2}.$$

Für $x = \frac{3l}{8}$ folgt $\max \mathrm{M} = \frac{9}{128} pl^2$ und für $x = l$ ergiebt sich das Einspannungsmoment $\mathrm{M}_B = -\frac{pl^2}{8}$. Die grössten Beanspruchungen sind

$$\sigma_1 = \frac{\mathrm{M}_B e_1}{J} \text{ und } \sigma_2 = -\frac{\mathrm{M}_B e_2}{J} \text{ (nach Gleich. 41).}$$

Aufgabe 2. Wagerechter, bei A und B eingespannter Balken mit Dreiecksbelastung (Fig. 77). Es sei wie in Aufgabe 1 sowohl L als auch $t = 0$.

*) In den Aufgaben 1—11 wird vorausgesetzt, dass überall die Kraftlinie mit einer Querschnittshauptachse zusammenfällt.

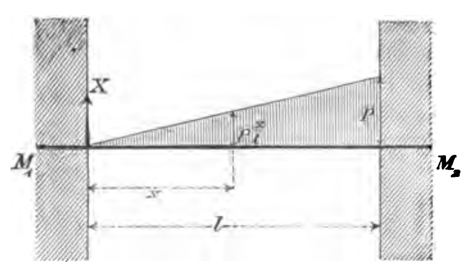


Fig. 77.

Bedeutet X die senkrechte Auflagerkraft und M_1 das Biegungsmoment am linken Auflager, so ist das Biegungsmoment an der Stelle x:

$$M = Xx - p\frac{x}{l}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3} + M_1.$$

Die beiden statisch nicht bestimmbaren Grössen X und M_1 müssen, bei konstantem EJ, den Bedingungen genügen:

$$\int_0^l M\frac{\partial M}{\partial X}dx = 0 \text{ und } \int_0^l M\frac{\partial M}{\partial M_1}dx = 0$$

und diese gehen, wegen $\frac{\partial M}{\partial X} = x$ und $\frac{\partial M}{\partial M_1} = 1$, nach Ausführung der Integrationen über in

$$X\frac{l^3}{3} - \frac{pl^4}{30} + M_1\frac{l^2}{2} = 0 \text{ und}$$

$$X\frac{l^2}{2} - \frac{pl^3}{24} + M_1 = 0;$$

sie liefern:

$$X = \frac{3}{20}pl,\ M_1 = -\frac{pl^2}{30}.$$

Nun folgt an der Stelle x:

$$M = \frac{p}{2}\left[\frac{3}{10}lx - \frac{1}{3}\frac{x^3}{l} - \frac{1}{15}l^2\right].$$

Für $x = l\sqrt{0,3}$ folgt $\max M = +0,02144\,pl^2$

Für $x = l$ ist $M_2 = -\frac{pl^2}{20}$.

Das grösste aller Momente ist M_2.

Aufgabe 3 (Fig. 78). Ein frei auf drei Stützpunkten ruhender, ursprünglich wagerechter, kontinuirlicher Balken ohne Gelenke und mit konstantem E und J sei durch beliebige senkrechte Lasten beansprucht; ausserdem mögen auf die Endquerschnitte (1) und (3) beliebig grosse, von ausserhalb des Balkens wirkenden Kräften herrührende Biegungsmomente M_1 und M_3 wirken. Es soll das Biegungsmoment M_2 für den über der Mittelstütze gelegenen Querschnitt unter der Voraussetzung berechnet werden, dass, bei festliegenden Stützpunkten (1) und (3), sich der Stützpunkt (2) um δ senkt und der Balken ungleichmässig erwärmt

wird. Die Temperaturänderung sei für den untersten Punkt eines Querschnittes t_1, für den obersten t_2; beide Werthe seien konstant und es sei $t_1 - t_2 = \Delta t$. Querschnittshöhe $= h$ (vergl. Fig. 75).

Wir benutzen (da $N = 0$ ist) die Bedingungsgleichung (vergl. Seite 86, Gleich. 49):

$$L' = \frac{1}{EJ}\int \mathrm{M}'\mathrm{M}\,dx + \varepsilon\,\frac{\Delta t}{h}\int \mathrm{M}'\,dx,$$

in welcher M das wirkliche Biegungsmoment für irgend einen Querschnitt bedeutet, während M′ das demselben Querschnitte entsprechende Biegungs-

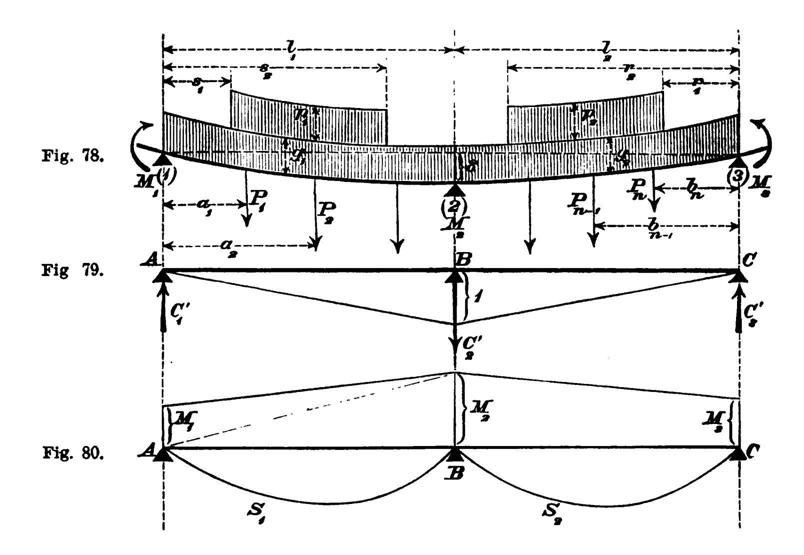


Fig. 78.

Fig 79.

Fig. 80.

moment für den Fall ist, dass die Lasten verschwinden und die statisch nicht bestimmbare Grösse (hier also M_2) den Werth 1 annimmt (Zustand $X = \mathrm{M}_2 = 1$). Die Momentenfläche für diesen Zustand ist das Dreieck in Fig. 79 mit der Höhe 1, und die zugehörigen Auflagerkräfte sind

$$C_1' = \frac{1}{l_1},\quad C_3' = \frac{1}{l_2},\ \text{beide aufwärts wirkend, und}$$

$$C_2' = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2},\ \text{abwärts gerichtet.}$$

Senkt sich die Mittelstütze um δ, so ist die virtuelle Arbeit der dem Zustande $X = \mathrm{M}_2 = 1$ entsprechenden Auflagerkräfte:

$$L' = C_2'\delta = \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2}\,\delta,$$

und es folgt somit die Bedingung

$$\text{(I)} \quad EJ\frac{l_1+l_2}{l_1 l_2}\,\delta = \int \mathrm{M}'\mathrm{M}\,dx + \varepsilon EJ\frac{\Delta t}{h}\int \mathrm{M}'\,dx.$$

Für einen Querschnitt im Abstande $x_1 < l_1$ von A folgt: $\mathrm{M}' = 1 \cdot \frac{x_1}{l_1}$, mithin für den Theil l_1: $\int \mathrm{M}'\,dx = \frac{1}{l_1}\int_0^{l_1} x_1\,dx_1 = \frac{l_1}{2}$ und

$$\int \mathrm{M}'\mathrm{M}\,dx = \frac{1}{l_1}\int_0^{l_1} x_1 \mathrm{M}\,dx_1.$$

Das Integral: $\int_0^{l_1} x_1 \mathrm{M}\,dx_1$ bedeutet das statische Moment der wirklichen Momentenfläche, bezogen auf die Senkrechte durch den Stützpunkt 1. Diese Momentenfläche besteht aus einem Trapeze, das bei (1) und (2) die Höhen M_1 und M_2 hat und aus der Momentenfläche AS_1B, welche dem bei (1) und (2) frei aufliegenden Einzelbalken l_1 entsprechen würde, Fig. 80. Wir nennen AS_1B die einfache Momentenfläche für den Theil l_1, bezeichnen ihr statisches Moment in Bezug auf die links von ihr gelegene Auflagersenkrechte mit $\mathfrak{L}_1$ und erhalten, indem wir das Trapez über AB in zwei Dreiecke zerlegt denken,

$$\int_0^{l_1} x_1 \mathrm{M}\,dx_1 = \mathfrak{L}_1 + \mathrm{M}_1\frac{l_1}{2}\cdot\frac{l_1}{3} + \mathrm{M}_2\frac{l_1}{2}\cdot\frac{2\,l_1}{3},$$

so dass sich für den Theil l_1 ergiebt:

$$\int \mathrm{M}'\mathrm{M}\,dx = \frac{\mathfrak{L}_1}{l_1} + \frac{1}{6}(\mathrm{M}_1 l_1 + 2\,\mathrm{M}_2 l_1);$$

ebenso ergiebt sich für den Theil l_2:

$$\int \mathrm{M}'\,dx = \frac{l_2}{2} \quad \text{und} \quad \int \mathrm{M}'\mathrm{M}\,dx = \frac{\mathfrak{R}_2}{l_2} + \frac{1}{6}(\mathrm{M}_3 l_2 + 2\,\mathrm{M}_2 l_2),$$

wobei $\mathfrak{R}_2$ das statische Moment der zu dem Theile l_2 gehörigen einfachen Momentenfläche BS_2C, bezogen auf die rechts von ihr gelegene Auflagersenkrechte, bedeutet.

Die Gleichung (I) geht jetzt, nach Multiplikation mit 6 über in

$$\text{(II)} \quad 6\,EJ\delta\,\frac{l_1+l_2}{l_1 l_2} = 6\,\frac{\mathfrak{L}_1}{l_1} + 6\,\frac{\mathfrak{R}_2}{l_2} + \mathrm{M}_1 l_1 + 2\,\mathrm{M}_2(l_1+l_2)$$
$$+ \mathrm{M}_3 l_2 + 3\,\varepsilon EJ\,\frac{l_1+l_2}{h}\,\Delta t;$$

sie ermöglicht die Berechnung von M_2.

Die am häufigsten vorkommenden Belastungen sind: Beanspruchung durch Einzellasten und durch eine gleichmässige Belastung.

Liegt auf einem einfachen Balken eine Einzellast P in den Abständen a und b von den Stützpunkten (Fig. 81), so ist die Momentenfläche ASB ein Dreieck, dessen Höhe $= \frac{Pab}{l}$, und dessen statisches Moment, bezogen auf die links gelegene Auflagersenkrechte,

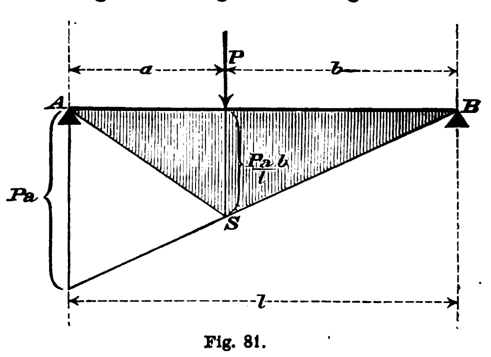


Fig. 81.

$$\text{(III)} \quad \mathfrak{L} = Pa \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} - Pa \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{Pa\,(l^2 - a^2)}{6}$$

ist. In Bezug auf die rechtsseitige Auflagersenkrechte ergiebt sich das statische Moment

$$\text{(IV)} \quad \mathfrak{R} = \frac{Pb\,(l^2 - b^2)}{6}.$$

Liegt zwischen den Grenzen $\xi = s_1$ und $\xi = s_2$ eine gleichmässige Last p für die Längeneinheit (Fig. 82), so entspricht dem Lasttheilchen $p \cdot d\xi$ nach Gleich. (III) der Werth

$$d\mathfrak{L} = \frac{pd\xi \cdot \xi\,(l^2 - \xi^2)}{6}$$

und es folgt

$$\text{(V)} \quad \mathfrak{L} = \int_{s_1}^{s_2} d\mathfrak{L} = \frac{p\,(s_2^2 - s_1^2)\,(2l^2 - s_2^2 - s_1^2)}{24\,l}.$$

Ist der ganze Balken AB mit g für die Längeneinheit belastet, so ergiebt sich aus (V) (mit $p = g$, $s_2 = l$ und $s_1 = 0$)

$$\text{(VI)} \quad \mathfrak{L} = \frac{gl^3}{24}.$$

Fig. 82.

Wenn also, wie in Fig. 78 angenommen wurde, auf den kontinuirlichen Balken gleichzeitig Einzellasten P und gleichmässige Lasten g_1, g_2, p_1, p_2 wirken, so geht mit den aus der Fig. 61 ersichtlichen Bezeichnungen die Gleich. II über in

$$\text{(VII)}\quad M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 + 3 E J \left[\frac{\varepsilon \Delta t}{h} - 2 \frac{\delta}{l_1 l_2}\right] (l_1 + l_2)$$
$$+ \frac{\sum\limits_1 Pa (l_1^2 - a^2)}{l_1} + \frac{\sum\limits_2 Pb (l_2^2 - b^2)}{l_2} + \frac{g_1 l_1^3}{4} + \frac{g_2 l_2^3}{4}$$
$$+ \frac{p_1 (s_2^2 - s_1^2)(2 l_1^2 - s_2^2 - s_1^2)}{4 l_1} + \frac{p_2 (r_2^2 - r_1^2)(2 l_2^2 - r_2^2 - r_1^2)}{4 l_2} = 0,$$

in welcher sich die Summen $\sum\limits_1$ und $\sum\limits_2$ beziehungsweise über die auf den Theilen l_1 oder l_2 ruhenden Lasten P erstrecken.

Die Gleichungen II und VII ermöglichen die Berechnung der Stützenmomente von **kontinuirlichen Trägern, welche frei auf beliebig vielen, sich um vorgeschriebene Strecken senkenden Stützen liegen** (Fig. 83). Bedeuten für einen solchen Träger M_1, M_2, M_3

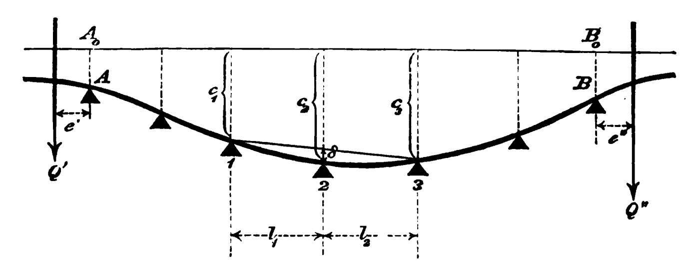


Fig. 83.

irgend drei auf einander folgende Stützenmomente und δ die Strecke, um welche sich der Stützpunkt 2 unter die Verbindungsgerade der beiden benachbarten Stützpunkte 1 und 3 verschiebt, so besteht zwischen den Momenten M_1, M_2, M_3 die durch die Gl. II oder Gl. VII dargestellte Beziehung. Bei n Stützen lassen sich $n - 2$ solcher Beziehungen angeben, und diese genügen zur Berechnung aller Momente M, da die Momente M_A und M_B über den Endstützen bekannt sind. Setzen wir im Allgemeinen überragende Trägerenden voraus und bezeichnen mit Q' und Q'' die Mittelkräfte aus den auf die überragenden Trägerstücke wirkenden Lasten, so erhalten wir

$$M_A = - Q' e' \text{ und } M_B = - Q'' e''.$$

Werden die Verschiebungen der Stützpunkte (1, 2, 3) aus einer gegebenen Anfangslage $A_0 B_0$ des Balkens mit c_1, c_2, c_3 bezeichnet, so ist

$$\delta = c_2 - c_1 \frac{l_2}{l_1 + l_2} - c_3 \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

und es ergiebt sich

$$\text{(VIII)}\quad \frac{\delta (l_1 + l_2)}{l_1 l_2} = \frac{c_2 - c_1}{l_1} + \frac{c_2 - c_3}{l_2}.$$

Aufgabe 4. Es sollen die bei Lösung der Aufgabe 3 abgeleiteten allgemeinen Gleichungen zur Berechnung der Stützenmomente des in Fig. 84 dargestellten gleichmässig belasteten, kontinuirlichen Trägern, dessen Mittelstützen sich um c_2 und c_3 gesenkt haben, benutzt werden.

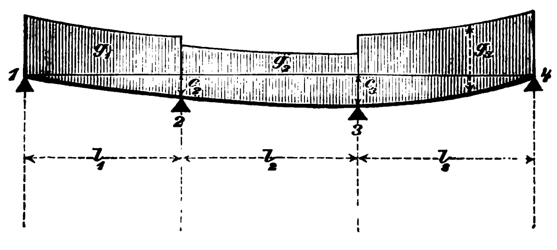


Fig. 84.

Zwischen den Stützenmomenten M_1, M_2 und M_3 besteht (nach Gl. VII mit Beachtung von Gl. VIII) die Beziehung:

$$M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 + \frac{3 E J \varepsilon \Delta t (l_1 + l_2)}{h} - 6 E J \left[\frac{c_2 - c_1}{l_1} + \frac{c_2 - c_3}{l_2} \right] + \frac{g_1 l_1^3}{4} + \frac{g_2 l_2^3}{4} = 0,$$

und ebenso folgt

$$M_2 l_2 + 2 M_3 (l_2 + l_3) + M_4 l_3 + \frac{3 E J \varepsilon \Delta t (l_2 + l_3)}{h} - 6 E J \left[\frac{c_3 - c_2}{l_2} + \frac{c_3 - c_4}{l_3} \right] + \frac{g_2 l_2^3}{4} + \frac{g_3 l_3^3}{4} = 0,$$

und in diese Gleichungen ist zu setzen:

$$M_1 = 0, \; M_4 = 0, \; c_1 = 0, \; c_4 = 0.$$

Die Auflösung der beiden Gleichungen nach M_2 und M_3 ergiebt z. B. für den Fall $l_1 = l_2 = l_3 = l$:

1) den Einfluss der Lasten g_1, g_2, g_3:

$$M_2 = -\frac{1}{60}(4 g_1 + 3 g_2 - g_3) l^2$$

$$M_3 = -\frac{1}{60}(4 g_3 + 3 g_2 - g_1) l^2$$

2) den Einfluss der Stützenverschiebungen c_1, c_2:

$$M_2 = \frac{6}{5} \frac{EJ}{l^2}(3 c_2 - 2 c_3)$$

$$M_3 = \frac{6}{5} \frac{EJ}{l^2}(3 c_3 - 2 c_2)$$

3) den Einfluss der Temperaturänderung:

$$M_2 = M_3 = -\frac{6}{5} \frac{\varepsilon E J}{h} \Delta t.$$

Die im Querschnitte über der Stütze 2 durch die unter 2 und 3 angeführten Einflüsse erzeugten Spannungen σ_1 und σ_2 sind nach Gl. 41 (vergl. auch Fig. 75):

$$\sigma_1 = + \frac{M_2 e_1}{J} = + \frac{6}{5} E \frac{e_1}{l} \left[\frac{3 c_2 - 2 c_3}{l} - \varepsilon \Delta t \frac{l}{h} \right] \text{ und}$$

$$\sigma_2 = - \frac{M_2 e_2}{J} = - \frac{6}{5} E \frac{e_2}{l} \left[\frac{3 c_2 - 2 c_3}{l} - \varepsilon \Delta t \frac{l}{h} \right].$$

Aufgabe 5. Es soll das Einspannungsmoment M_1 für einen ursprünglich wagerechten Balken berechnet werden, auf welchen Einzellasten P wirken und der, bei gleich hoch gelegenen Stützpunkten 1 und 2 am linken Ende unter einem gegebenen Winkel τ eingespannt wird, während er am rechten Ende frei aufliegt. Es soll, wie in den Aufgaben 6 und 7, eine ungleichmässige Erwärmung berücksichtigt werden. Fig. 85.

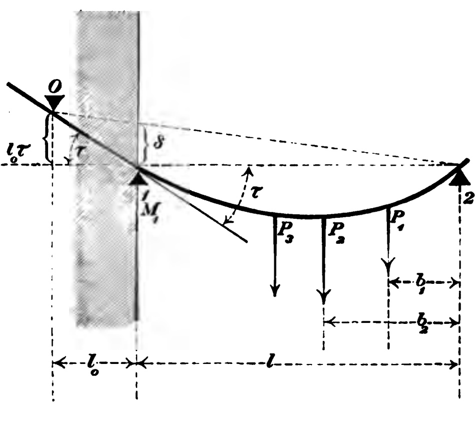


Fig. 85.

Wir betrachten den Balken als frei auf 3 Stützen 0, 1, 2 ruhend. Die Endstütze 0 liegt unendlich nahe der Stütze 1 und ist um $l_0 \tau$ angehoben.

Gleich. VII in Aufgabe 3 liefert dann die Beziehung:

$$M_0 l_0 + 2\,M_1\,(l_0 + l) + M_2 l + 3\,EJ\left[\frac{\varepsilon \Delta t}{h} - \frac{2\,\delta}{l_0 l}\right](l_0 + l)$$
$$+ \Sigma \frac{Pb\,(l^2 - b^2)}{l} = 0,$$

in welcher δ die Verschiebung des Punktes 1 gegen die Gerade $\overline{02}$ bedeutet. Es ist

$$\delta = l_0 \tau \frac{l}{l_0 + l} \quad \text{also} \quad \frac{\delta}{l_0} = \frac{\tau l}{l_0 + l}$$

und es ergiebt sich, da $l_0 = 0$, $M_0 = 0$ und $M_2 = 0$ ist, der Werth $\dfrac{2\,\delta}{l_0 l} = 2\dfrac{\tau}{l}$ und die Gleichung:

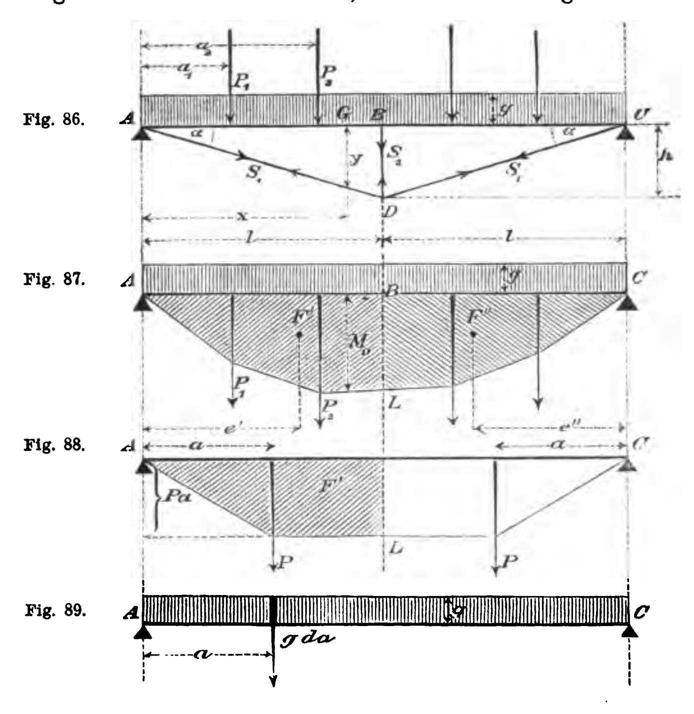
$$2\,M_1 l + 3\,EJl\left[\frac{\varepsilon \Delta t}{h} - 2\frac{\tau}{l}\right] + \frac{\Sigma Pb\,(l^2 - b^2)}{l} = 0;$$

mithin ist das gesuchte Einspannungsmoment

$$M_1 = -\frac{\Sigma Pb\,(l^2 - b^2)}{2\,l^2} + \frac{3}{2}\frac{EJ}{l}\left[2\,\tau - \varepsilon \Delta t \frac{l}{h}\right].$$

Die Lösung dieser Aufgabe lehrt auch, in welcher Weise die Gleichungen II und VII in Aufgabe 6 auf die Berechnung der Stützenmomente eines kontinuirlichen Balkens angewendet werden können, dessen Enden unter bestimmten Winkeln eingespannt sind.

Aufgabe 6. Ein bei A und C frei aufliegender, durch 2 Zugstangen und eine Strebe verstärkter Träger, Fig. 86, sei durch senkrechte Lasten beansprucht. Die Spannkräfte S_1, S_2 in den gelenkartig befestigten Fachwerkstäben sind, wenn X die wagerechte Seitenkraft



von S_1 bedeutet: $S_1 = X \sec \alpha$ und $S_2 = -2X \operatorname{tg} \alpha$, und für den Balkenquerschnitt G bei x ergiebt sich die Längskraft

$$N = -S_1 \cos \alpha = -X$$

und das Biegungsmoment

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_0 - S_1 y \cos \alpha = \mathrm{M}_0 - Xy,$$

wobei M_0 das Biegungsmoment für einen bei A und C frei aufliegenden, nicht verstärkten Balken AC bedeutet (Fig. 87). Die Momentenfläche ALC für diesen einfachen Balken AC möge die einfache Momentenfläche heissen.*)

Die Grösse X ist statisch nicht bestimmbar, sie muss, wenn Temperaturänderungen unberücksichtigt bleiben sollen, der Bedingung ge-

*) Infolge der gleichmässigen Belastung g sind die Begrenzungslinien der Momentenfläche schwach gekrümmte Linien, nicht gerade Linien, wie in Figur 87 der Einfachheit wegen gezeichnet.

nügen:

$$\text{(I)} \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx + \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} dx + \Sigma \frac{Ss}{EF} \cdot \frac{\partial S}{\partial X} = 0.$$

Bedeuten nun

E, J und F den Elasticitätsmodul, das Trägheitsmoment und den Inhalt für sämmtliche Querschnitte des Balkens AC,

E_1 und F_1 die entsprechenden Werthe für die Stäbe AD und CD,

E_2 und F_2 „ „ „ „ den Stab BD,

so folgt für die Fachwerkstäbe, wegen $\frac{\partial S_1}{\partial X} = \sec\alpha$ und $\frac{\partial S_2}{\partial X} = -2\,\mathrm{tg}\,\alpha$:

$$\Sigma \frac{Ss}{EF} \cdot \frac{\partial S}{\partial X} = 2 \frac{S_1 s_1}{E_1 F_1} \sec\alpha - \frac{S_2 s_2}{E_2 F_2} 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$= X\left(\frac{2l \sec^3\alpha}{E_1 F_1} + \frac{4l\,\mathrm{tg}^3\alpha}{E_2 F_2}\right)$$

und für den Balken ABC, wegen $\frac{\partial M}{\partial X} = -y$ und $\frac{\partial N}{\partial X} = -1$,

$$\int_0^{2l} \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} dx + \int_0^{2l} \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X} dx = -\frac{1}{EJ} \int_0^{2l} M_0 y\, dx$$

$$+ \frac{X}{EJ} \int_0^{2l} y^2 dx + \frac{2Xl}{EF}$$

und es geht, mit $\int_0^{2l} y^2 dx = 2 \int_0^{l} \left(\frac{hx}{l}\right)^2 dx = 2 \frac{h^2 l}{3}$ die Gleich. I. über in

$$-\frac{1}{EJ} \int_0^{2l} M_0 y\, dx + \frac{2Xh^2 l}{3EJ} + \frac{2Xl}{EF} + X\left(\frac{2l \sec^3\alpha}{E_1 F_1} + \frac{4l\,\mathrm{tg}^3\alpha}{E_2 F_2}\right) = 0;$$

sie liefert den Werth:

$$X = \frac{3 \int_0^{2l} M_0 y\, dx}{2\mu h^2 l},$$

wo

$$\mu = 1 + 3 \frac{J}{Fh^2} \left(1 + \frac{E}{E_1} \frac{F}{F_1} \sec^3\alpha + 2 \frac{E}{E_2} \frac{F}{F_2} \mathrm{tg}^3\alpha\right)$$

eine von den Querschnittsabmessungen abhängige Zahl ist.

Die einfache Momentenfläche ALC in Fig. 87 wird durch die Mittel-Senkrechte in zwei Teile zerlegt, deren Inhalte gleich F' und F'' und deren Schwerpunktsabstände von den benachbarten Auflager-Senkrechten gleich e' und e'' sein mögen, und es folgt nun für das Balkenstück AB:

$$\int_0^l \mathrm{M}_0 y\,dx = \frac{h}{l}\int_0^l \mathrm{M}_0 x\,dx = \frac{h}{l}\cdot F'e'$$

und für den ganzen Balken AC:

$$\int_0^{2l} \mathrm{M}_0 y\,dx = \frac{h}{l}(F'e' + F''e''),$$

mithin ergiebt sich

$$X = \frac{3(F'e' + F''e'')}{2\mu h l^2}.$$

Zwei in Bezug auf die Mittel-Senkrechte gleich gelegenen Einzellasten P entspricht z. B. als einfache Momentenfläche ein Trapez von der Höhe Pa (Fig. 88), und für dieses ist

$$F'e' = F''e'' = Pa\cdot l\cdot\frac{l}{2} - Pa\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3} = \frac{Pa(3l^2 - a^2)}{6},$$

weshalb die beiden Lasten P hervorrufen:

$$X = \frac{Pa(3l^2 - a^2)}{2\mu h l^2}.$$

Da beide Lasten zu X denselben Beitrag liefern, so entsteht bei Aufbringen nur einer Last:

$$X = \frac{Pa(3l^2 - a^2)}{4\mu h l^2}.$$

Eine gleichförmige Belastung g für die Längeneinheit (Fig. 89) darf als aus unendlich kleinen Einzellasten $g\,da$ bestehend aufgefasst werden; sie erzeugt, wenn sie auf der ganzen Länge des Trägers wirkt,

$$X = \frac{1}{4\mu h l^2}\cdot 2\int_0^l a(3l^2 - a^2)\,g\,da = \frac{5gl^2}{8\mu h}.$$

Wird also der Träger gleichzeitig durch eine gleichmässige Last und eine Schaar von Einzellasten beansprucht, Fig. 86, so entsteht

$$X = \frac{5gl^4 + 2\Sigma Pa(3l^2 - a^2)}{8\mu h l^2}.$$

Nach Berechnung von X lassen sich die Beanspruchungen σ in allen Theilen des Trägers leicht angeben.

Die abgeleiteten Formeln gelten natürlich auch für das durch Umkehrung des verspannten Balkens entstandene einfache Hängewerk, Fig. 90. Nur sind die Vorzeichen der Spannkräfte S umzukehren.

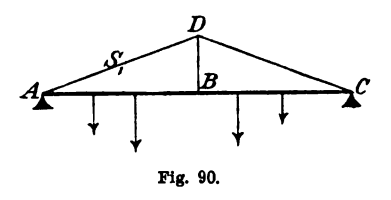


Fig. 90.

Liegt ein einfaches Sprengewerk vor, Fig. 91, so verlängere man die Mittellinien der Streben bis zu ihren Schnittpunkten A' und C' mit den Lothrechten durch A und C, bezeichne die auf die Gerade $A'C'$ bezogene Pfeilhöhe des Sprengewerks mit h und zerlege den Strebendruck S_1 im Punkte A' in den Horizontalschub X und die lothrechte Seitenkraft A_u. Ist dann A_o der Stützenwiderstand am Balkenende A, so ergiebt sich der Einfluss einer Last P auf die Summe $A_o + A_u$ aus der Momentengleichung für C'

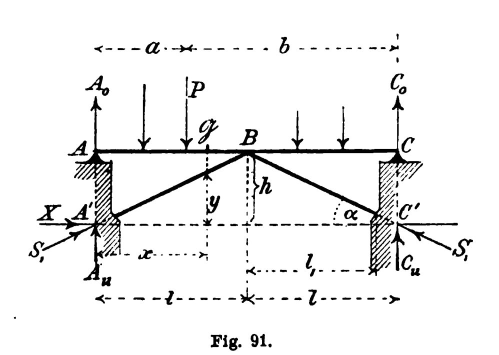


Fig. 91.

$$(A_o + A_u)\, 2l - Pb = 0$$

$$A_o + A_u = \frac{Pb}{2l}$$

so dass also $A_o + A_u$ gleich dem Auflagerwiderstande A eines Balkens AC ist, der nur bei A und C aufliegt. Führt man nun an der Stelle x einen lothrechten Schnitt und zerlegt man an der Schnittstelle die Strebenkraft S_1 nach wagerechter und lothrechter Richtung, so ist die wagerechte Seitenkraft $= X$ und das Angriffsmoment für den Balkenquerschnitt 𝔖 wird (da A_o, A_u zusammen gleich A sind)

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_0 - Xy\text{*)}$$

wo M_0 das Moment für den nur bei A und C gestützten Balken ist. Die ganze Betrachtung lehrt, dass die vorhin für X abgeleiteten Formeln gültig bleiben, nur hat jetzt μ eine andere Bedeutung; denn es fehlt die Hängestange, und ausserdem wird der Balken nur auf Biegung beansprucht. Man findet

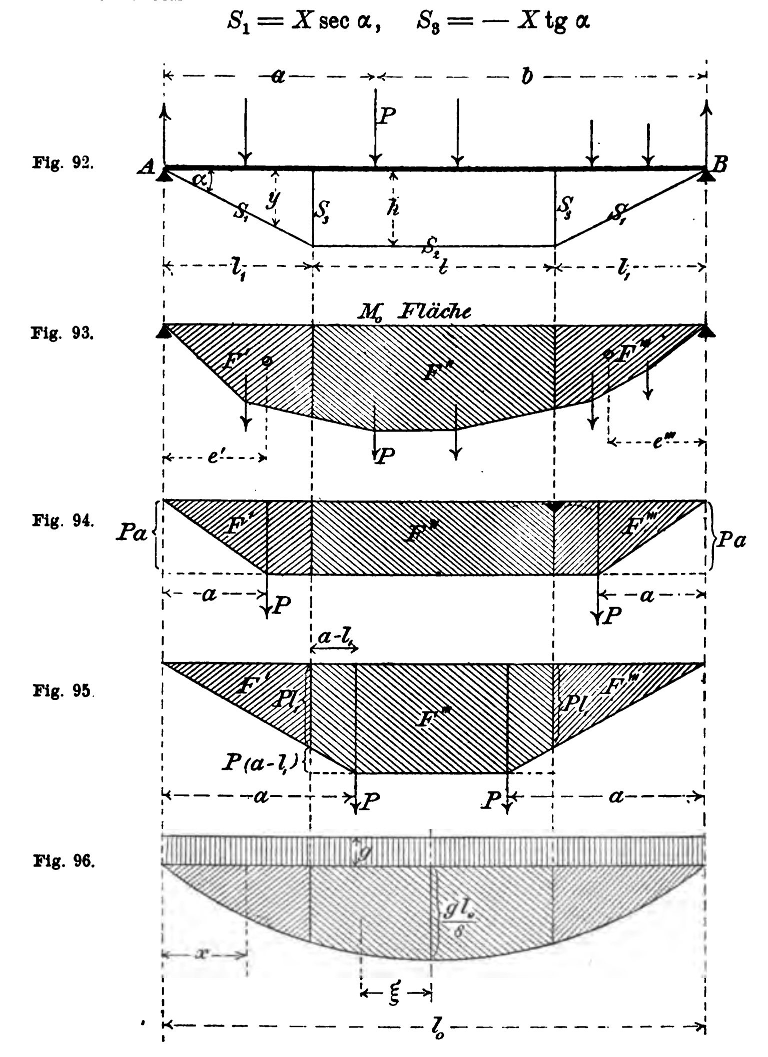
$$\mu = 1 + 3\,\frac{E}{E_1}\,\frac{J}{F_1 h^2}\sec^3\alpha\cdot\frac{l_1}{l}\text{**)}$$

*) Diese Gleichung folgt auch daraus, dass der Einfluss von A_o sich auf die Form bringen lässt: $A_o x = (A - A_u)x = Ax - X\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot x = Ax - Xy$.

**) Der Faktor $l_1 : l$ ist erforderlich, weil die Länge der Strebe $s_1 = \overline{A'B}\cdot\frac{l_1}{l}$ ist.

Aufgabe 7. Für den in Fig. 92 dargestellten Balken mit zwei von Zugstangen getragenen Mittelstützen, wählen wir die Spannkraft S_2 in der mittelsten Zugstange zur statisch nicht bestimmbaren Grösse X und erhalten

$$S_1 = X \sec \alpha, \quad S_3 = -X \operatorname{tg} \alpha$$



ferner für den Balken die Längskraft

$$N = -X$$

und (an der Stelle x) das Biegungsmoment

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_0 - Xy \text{ (vergl. Aufgabe 6),}$$

wo M_0 das Angriffsmoment für den nur in A und B gestützten Balken bedeutet. Ist $x > l_1$ aber $< l + l_1$ so wird $y = h$, wir wollen aber die allgemeine Bezeichnung y beibehalten und $\frac{\partial M}{\partial X} = -y$ setzen.

Beziehen sich nun die Werthe

E_1, J_1, F auf den Balken

E_1, F_1 auf die durch S_1 gespannte Zugstange

E_1, F_2 " " " S_2 " " $(E_2 = E_1)$,

E_3, F_3 " " " S_3 gedrückte Stütze

so ist in die auch für den vorliegenden Fall gültige Gleich. I, Seite 98, einzusetzen: $\frac{\partial S_1}{\partial X} = \sec\alpha$, $\frac{\partial S_2}{\partial X} = 1$, $\frac{\partial S_3}{\partial X} = -\operatorname{tg}\alpha$ also:

$$\Sigma \frac{Ss}{EF}\frac{\partial S}{\partial X} = 2\frac{S_1 s_1}{E_1 F_1}\sec\alpha + \frac{S_2 l}{E_1 F_2} - 2\frac{S_3 h}{E_3 F_3}\operatorname{tg}\alpha$$

$$= X\left[\frac{2 l_1 \sec^3\alpha}{E_1 F_1} + \frac{l}{E_1 F_2} + \frac{2 l_1 \operatorname{tg}^3\alpha}{E_3 F_3}\right]$$

ferner

$$\int \frac{M}{EJ}\frac{\partial M}{\partial X}dx + \int \frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial X}ds = -\frac{1}{EJ}\int M_0 y\,dx$$

$$+ \frac{X}{EJ}\int y^2 dx + \frac{X(2l_1 + l)}{EF},$$

wobei die Integrale über den ganzen Balken auszudehnen sind.

Nun ist $\frac{1}{2}\int y^2 dx = \int (y\,dx)\cdot\frac{y}{2}$ das statische Moment des von der Balkenachse AB und den Zugstangenachsen begrenzten Trapezes in Bezug auf AB, also

$$\frac{1}{2}\int y^2 dx = \frac{l_1 h}{2}\cdot\frac{h}{3} + lh\cdot\frac{h}{2} + \frac{l_1 h}{2}\cdot\frac{h}{3} \text{ und}$$

$$\int y^2 dx = \frac{h^2(2l_1 + 3l)}{3}.$$

Mithin geht die Gleich. I, Seite 98, über in

$$-\frac{1}{EJ}\int M_0 y\,dx + \frac{Xh^2(2l_1 + 3l)}{3EJ} + \frac{X(2l_1 + l)}{EF}$$

$$+ X\left[\frac{2 l_1 \sec^3\alpha}{E_1 F_1} + \frac{l}{E_1 F_1} + \frac{2 l_1 \operatorname{tg}^3\alpha}{E_3 F_3}\right] = 0$$

sie liefert für X den Werth

$$X = \frac{3\int M_0 y\,dx}{\mu h^2(2l_1 + 3l)}$$

wo

$$\mu = 1 + 3\frac{J}{Fh^2}\frac{2l_1+l}{2l_1+3l} + \frac{3l_1}{h^2(2l_1+3l)}\left(2\frac{E}{E_1}\frac{J}{F_1}\sec^3\alpha + \frac{E}{E_1}\frac{J}{F_2}\frac{l}{l_1} + 2\frac{E}{E_3}\frac{J}{F_3}\operatorname{tg}^3\alpha\right).$$

Da nun den Balkentheilen l_1, l, l_1 beziehw. $y = \frac{h}{l_1}x$, $y = h$, $y = \frac{h}{l_1}x$ entspricht, so findet man (vgl. Seite 99) leicht die Beziehung

$$\int M_0 y\,dx = \frac{h}{l_1}[F'e' + F'''e'''] + hF'',$$

wo F', F'', F''' die Inhalte der zu den Balkentheilen l_1, l, l_1 gehörigen Theile der einfachen Momentenfläche sind, ferner e' und e''' die Schwerpunktsabstände der Flächen F', F''' von den Lothrechten durch A beziehw. B, Fig. 93.

Zwei in Bezug auf die Mittelsenkrechten gleich gelegenen Lasten P entspricht als einfache Momentenfläche ein Trapez von der Höhe Pa und man erhält für $a < l_1$ (Fig. 94):

$$F'e' = F'''e''' = Pa \cdot l_1\frac{l_1}{2} - Pa \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{Pa(3l_1^2 - a^2)}{6}$$

$$F'' = Pal \text{ also}$$

$$\int M_0 y\,dx = \frac{Pa(3l_1^2 - a^2)h}{6l_1} + Palh$$

und für $a > l_1$ und $< (l_1 + l)$ (Fig. 95):

$$F'e' = F'''e''' = Pl_1\frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{3}; \quad F'' = Pal - P(a - l_1)^2$$

$$\int M_0 y\,dx = \frac{Pl_1^2 h}{6} + Ph[al - (a - l_1)^2].$$

Da zwei symmetrisch liegende Lasten zu X denselben Beitrag liefern, so entsteht bei Aufbringen nur einer Last:

für $a < l_1$

$$X = Pa\frac{3l_1^2 - a^2 + 6l_1 l}{4\mu h l_1(2l_1 + 3l)}$$

für $a > l_1$

$$X = P\frac{l_1^2 + 6al - 6(a - l_1)^2}{4\mu h(2l_1 + 3l)}.$$

Behufs Ermittlung des Einflusses einer gleichförmigen Belastung g setzen wir (mit $l_0 = 2l_1 + l$) für den Theil l_1:

$$M_0 = \frac{g l_0 x}{2} - \frac{g x^2}{2}$$

und für den Theil l (indem wir die Abscisse $\xi = \frac{l_0}{2} - x$ einführen, Fig. 96)

$$M_0 = \frac{g l_0^2}{8} - \frac{g \xi^2}{2},$$

weshalb

$$\frac{1}{h}\int M_0 y\,dx = 2\int_0^{l_1}\left(\frac{g l_0 x}{2} - \frac{g x^2}{2}\right)\frac{x}{l_1}\,dx + 2\int_0^{\frac{1}{2}l}\left(\frac{g l_0^2}{8} - \frac{g\xi^2}{2}\right)d\xi$$

$$= g\,\frac{5 l_1^3 + l^3 + 10 l_1^2 l + 6 l_1 l^2}{12}$$

und schliesslich

$$X = \frac{g\,(5 l_1^3 + l^3 + 10 l_1^2 l + 6 l_1 l^2)}{4\mu h\,(2 l_1 + 3 l)}.$$

Die für X abgeleiteten Formeln gelten auch für den Druck im Spannriegel eines doppelten Hängewerks, Fig. 97, und für den Horizontalschub eines doppelten Sprengewerks, Fig. 98. Für letzteres ist (unter der Annahme dass der Druck X lediglich vom Spannriegel aufgenommen wird):

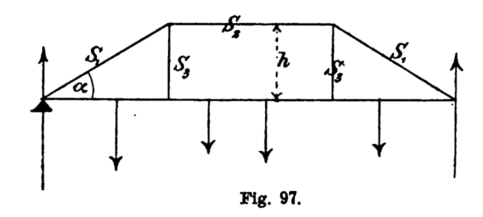


Fig. 97.

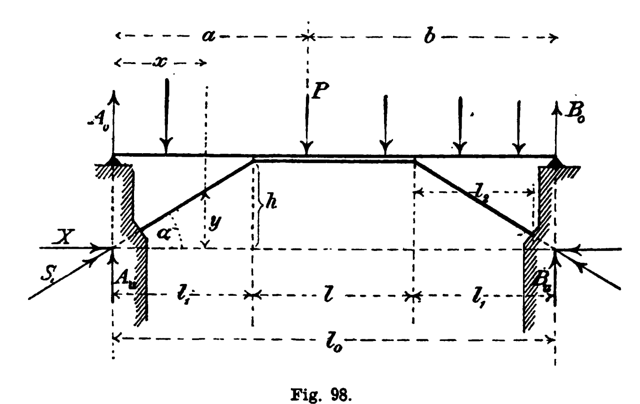


Fig. 98.

$$\mu = 1 + \frac{3}{h^2(2l_1 + 3l)}\left(2\frac{J l_2}{F_1}\sec^3\alpha + \frac{J l}{F_2}\right)\frac{E}{E_1}.$$

Für das doppelte Sprengewerk erhält man ferner, genau wie auf Seite 100 für das einfache Sprengewerk):

$$A_0 + A_u = \frac{\Sigma Pb}{l_0}, \quad B_0 + B_u = \frac{\Sigma Pa}{l_0}$$
$$A_u = X \operatorname{tg} \alpha = B_u.$$

Das Angriffsmoment für den Balkenquerschnitt an der Stelle x wird $M = M_0 - Xy$. Für den Theil l ist $y = h$.

Aufgabe 8. Der in Fig. 99 dargestellte, oben durch ein Halsband und unten durch einen Zapfen gestützte Giessereikrahn ist einfach statisch unbestimmt; seine Beanspruchung lässt sich feststellen, sobald eine der beiden Streben-Spannkräfte D_1 oder D_2 bekannt ist.*) Wird D_1 als statisch nicht bestimmbare Grösse angesehen, so muss der Bedingung

$$\int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial D_1} dx + \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial D_1} dx = 0$$

genügt werden. Mit der erlaubten Vernachlässigung der Wirkung der Längskräfte, welche, verglichen mit dem Einflusse der Momente, gering ist, entsteht:

$$\text{(I)} \quad \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial D_1} dx = 0.$$

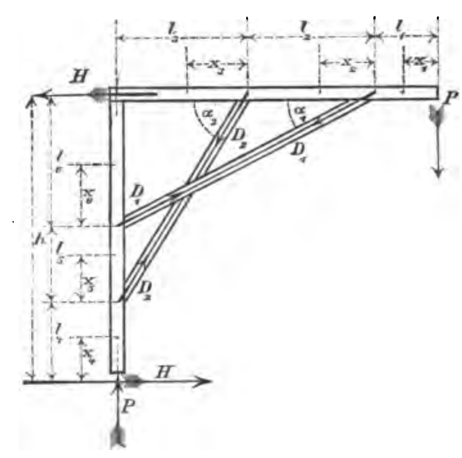


Fig. 99.

Zunächst sei eine Beziehung zwischen D_1 und D_2 aufgestellt. Auf den wagerechten Krahnbalken wirken die Querkräfte P, $D_1 \sin \alpha_1$ und $D_2 \sin \alpha_2$, und es muss sein:

$$P(l_1 + l_2 + l_3) + D_1 \sin \alpha_1 (l_2 + l_3) + D_2 \sin \alpha_2 l_3 = 0,$$

mithin

$$\text{(II)} \quad D_2 \sin \alpha_2 = -D_1 \sin \alpha_1 \frac{l_2 + l_3}{l_3} - P \frac{l_1 + l_2 + l_3}{l_3},$$

und ebenso ergiebt sich für die an der Krahnsäule angreifenden Querkräfte:

$$Hh + D_2 \cos \alpha_2 (l_5 + l_6) + D_1 \cos \alpha_1 l_6 = 0$$

---

*) Es ist dies nur dann streng richtig, wenn alle Krahntheile durch reibungslose Gelenke miteinander befestigt werden, was oben vorausgesetzt wird.

und hieraus

$$\text{(III)} \quad D_2 \cos \alpha_2 = - D_1 \cos \alpha_1 \frac{l_6}{l_5 + l_6} - H \frac{h}{l_5 + l_6},$$

wo

$$H = P \frac{l_1 + l_2 + l_3}{h}.$$

Wir bezeichnen mit J und J_0 beziehungsweise die Trägheitsmomente der Querschnitte von Balken und Säule, mit E und E_0 die zugehörigen Elasticitätsziffern und erhalten für die Theile l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 und l_6 folgende Momente und Werthe $\int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial D_1} dx$:

$$\text{Theil } l_1\text{: } M = P x_1, \quad \frac{\partial M}{\partial D_1} = 0;$$

$$\text{Theil } l_2\text{: } M = P(l_1 + x_2) + D_1 \sin \alpha_1 x_2; \quad \frac{\partial M}{\partial D_1} = x_2 \sin \alpha_1$$

$$\int_0^{l_2} \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial D_1} dx_2 = \frac{l_2^2 \sin \alpha_1}{3EJ} \left[\frac{P}{2} (3l_1 + 2l_2) + D_1 l_2 \sin \alpha_1 \right];$$

Theil l_3: $M = P(l_1 + l_2 + x_3) + D_1 \sin \alpha_1 (l_2 + x_3) + D_2 \sin \alpha_2 \cdot x_3$, oder, wenn D_2 mittels Gleich. II ausgedrückt wird,

$$M = [P(l_1 + l_2) + D_1 l_2 \sin \alpha_1] \frac{l_3 - x_3}{l_3}; \quad \frac{\partial M}{\partial D_1} = \frac{l_2}{l_3} (l_3 - x_3) \sin \alpha_1;$$

$$\int_0^{l_3} \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial D_1} dx_3 = \frac{l_2 l_3 \sin \alpha_1}{3EJ} [P_1 (l_1 + l_2) + D_1 l_2 \sin \alpha_1];$$

$$\text{Theil } l_4\text{: } M = H x_4, \quad \frac{\partial M}{\partial D_1} = 0;$$

$$\text{Theil } l_5\text{: } M = H(l_4 + x_5) + D_2 \cos \alpha_2 x_5$$

und, wenn D_2 mittels Gleich. III ausgedrückt wird,

$$M = H \left(1 - \frac{x_5}{l_5 + l_6}\right) l_4 - D_1 \cos \alpha_1 \frac{l_6 x_5}{l_5 + l_6};$$

$$\frac{\partial M}{\partial D_1} = - \cos \alpha_1 \frac{l_6 x_5}{l_5 + l_6};$$

$$\int_0^{l_5} \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial D_1} dx_5 = \frac{l_6 l_5^2 \cos \alpha_1}{3 (l_5 + l_6)^2 E_0 J_0} \left[D_1 l_5 l_6 \cos \alpha_1 - \frac{H}{2} l_4 (l_5 + 3l_6) \right];$$

Theil l_6: $M = H(l_4 + l_5 + x_6) + D_2 \cos \alpha_2 (l_5 + x_6) + D_1 \cos \alpha_1 x_6$ und, mit Beachtung von Gl. III,

$$M = (H l_4 - D_1 l_5 \cos \alpha_1) \frac{l_6 - x_6}{l_5 + l_6}; \quad \frac{\partial M_6}{\partial D_1} = - \frac{l_5 (l_6 - x_6)}{l_5 + l_6} \cos \alpha_1;$$

$$\int_0^{l_6} \frac{\mathrm{M}}{EJ} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial D_1} dx_6 = \frac{l_5 l_6^3 \cos \alpha_1}{3 (l_5 + l_6)^2 E_0 J_0} [D_1 l_5 \cos \alpha_1 - H l_4].$$

Setzt man nun, nach Gleich. I, die Summe aller berechneten Integrale: $\int_0^l \frac{\mathrm{M}}{EJ} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial D_1} dx$ gleich Null und multiplicirt man mit $3\,EJ$, so erhält man die Gleichung:

$$0 = l_2^2 \sin \alpha_1 \left[\frac{P}{2} (3 l_1 + 2 l_2) + D_1 l_2 \sin \alpha_1\right] + l_2 l_3 \sin \alpha_1 \, [P (l_1 + l_2)$$

$$+ D_1 l_2 \sin \alpha_1] + \frac{l_6 l_5^2 \cos \alpha_1}{(l_5 + l_6)^2} \frac{EJ}{E_0 J_0} \left[D_1 l_5 l_6 \cos \alpha_1 - \frac{H}{2} l_4 \; (l_5 + 3 l_6)\right]$$

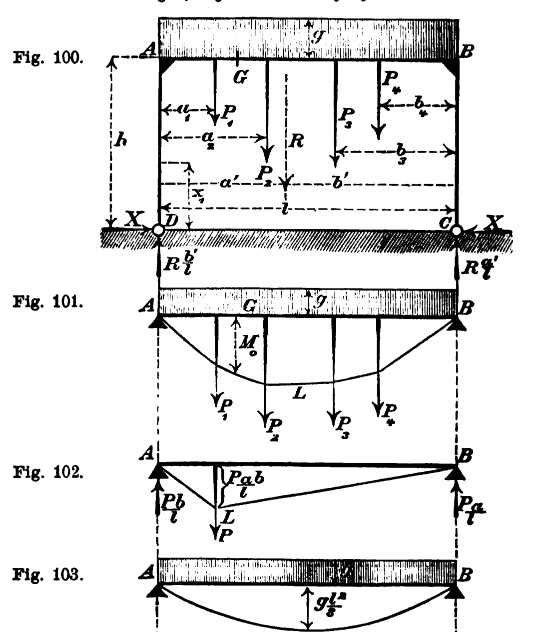
$$+ \frac{l_5 l_6^3 \cos \alpha_1}{(l_5 + l_6)^2} \frac{EJ}{E_0 J_0} [D_1 l_5 \cos \alpha_1 - H l_4] = 0$$

und hieraus folgt, mit $\sin \alpha_1 = \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = \cos \alpha_1 \frac{l_6}{l_2 + l_3}$,

$$D_1 = -\frac{1}{2} \frac{P[l_1 l_2 + 2(l_1 + l_2)(l_2 + l_3)] \frac{l_2}{l_2 + l_3} - H \frac{l_4 l_5}{l_5 + l_6} [l_5 + 2 l_6] \frac{EJ}{E_0 J_0}}{l_2^2 \sin \alpha_1 + \frac{l_5^2 l_6}{l_5 + l_6} \cos \alpha_1 \frac{EJ}{E_0 J_0}}.$$

Nun kann man nach Gleichung II oder III die Strebenkraft D_2 finden und sämmtliche Biegungsmomente berechnen.

Aufgabe 9. Das in Figur 100 dargestellte Krahngerüst ist bei D und C fest, aber gelenkartig gelagert. Bei A und B sind starre Eckverbindungen gedacht. Bedeutet R die Mittelkraft aus den auf den Balken AB wirkenden, senkrecht angenommenen Lasten, so sind die senkrechten Auflagerkräfte bei D und C be-



zieh. $=\frac{Rb'}{l}$ und $=\frac{Ra'}{l}$. Die wagerechten Auflagerkräfte sind gleich gross und statisch nicht bestimmbar, sie seien $= X$ gesetzt.

Bleiben Verschiebungen der Angriffspunkte der Auflagerkräfte und Temperaturänderungen unberücksichtigt, so muss X der Bedingung genügen:

$$\int \frac{\mathrm{M}}{EJ} \cdot \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X}\, dx + \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial X}\, dx = 0.$$

Bedeuten J_1 und E_1 das Trägheitsmoment und den Elasticitätsmodul für alle Querschnitte der Stäbe AD und CB,
J und E die entsprechenden Werthe für den Stab AB,
F den konstanten Querschnitt des Stabes AB,

so folgt für den Stab AD:

$$\mathrm{M} = -Xx_1,\quad N = -\frac{Rb'}{l},\quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X} = -x_1,\quad \frac{\partial N}{\partial X} = 0,$$

$$\text{(I)}\quad \int_0^h \frac{\mathrm{M}}{E_1 J_1} \cdot \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X}\, dx_1 = \frac{Xh^3}{3E_1 J_1};\ \int \frac{N}{E_1 F_1} \cdot \frac{\partial N}{\partial X}\, dx_1 = 0.$$

Dieselben Werthe der gesuchten Integrale ergeben sich für CB. Dem Stabe AB entspricht

$$N = -X,\quad \frac{\partial N}{\partial X} = -1,$$

$$\text{(II)}\quad \int_0^l \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial X}\, dx = \frac{Xl}{EF}.$$

Das Biegungsmoment für irgend einen Querschnitt G des Stabes AB ist

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_0 - Xh,$$

unter M_0 das Biegungsmoment für einen einfachen, bei A und B frei aufliegenden Balken verstanden (Fig. 53), und es folgt somit $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X} = -h$ und

$$\text{(III)}\quad \int_0^l \frac{\mathrm{M}}{EJ} \cdot \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X}\, dx = +\frac{Xh^2 l}{EJ} - \frac{h}{EJ}\int_0^l \mathrm{M}_0\, dx.$$

Setzt man die Summe der mit I, II, III bezeichneten Integrale (von denen das erste zweimal zu nehmen ist) gleich Null, so erhält man die Gleichung:

$$2\,\frac{Xh^3}{3E_1 J_1} + \frac{Xl}{EF} + \frac{Xh^2 l}{EJ} - \frac{h}{EJ}\int_0^l \mathrm{M}_0\, dx = 0$$

und aus dieser folgt:

$$\text{(IV)} \quad X = \frac{\int_0^l \mathrm{M}_0 dx}{hl\left[1 + \frac{2}{3}\frac{J}{J_1}\frac{E}{E_1}\frac{h}{l} + \frac{J}{Fh^2}\right]}.$$

Hierin bedeutet $\int_0^l \mathrm{M}_0 dx$ den Inhalt der dem einfachen Balken AB (Fig. 101) entsprechenden Momentenfläche ALB. Wirkt z. B. auf AB nur die Einzelkraft P, Fig. 102, so ist die Momentenfläche ALB ein Dreieck von der Höhe $\frac{Pab}{l}$ und dem Inhalte

$$\text{(V)} \quad \int_0^l \mathrm{M}_0 dx = \frac{Pab}{2}.$$

Einer gleichmässigen Belastung der Längeneinheit von AB mit g entspricht eine Parabelfläche ALB von der Höhe $\frac{gl^2}{8}$, Fig. 103, und dem Inhalte

$$\int_0^l \mathrm{M}_0 dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{gl^2}{8} \cdot l = \frac{gl^3}{12}.$$

Bei gleichzeitigem Auftreten einer gleichmässigen Last und einer Schaar von Einzellasten entsteht:

$$\text{(VI)} \quad X = \frac{gl^3 + 6\Sigma Pab}{12hl\left[1 + \frac{2}{3}\frac{J}{J_1}\frac{E}{E_1}\frac{h}{l} + \frac{J}{Fh^2}\right]}.$$

Nachdem X gefunden ist, lassen sich die Spannungen σ in allen Theilen des Gerüstes leicht berechnen.

Aufgabe 10. Fig. 104 stellt die Endversteifung einer Balkenbrücke mit einer oben liegenden und einer unten liegenden Fahrbahn dar. Der untere Endquerträger fehlt; der obere sei bei A und B gelenkartig aufgelagert und durch lothrechte Lasten beansprucht, er übe auf die Endständer die Drücke A und B aus; vergl. die Figuren 105, 106, 107, in denen die am Querträger und an den Ständern angreifenden Kräfte angegeben sind; N bedeutet die im Querträger auftretende Längskraft. A und B werden nach den bekannten Regeln für den einfachen Balken berechnet. Man erhält

$$A = \frac{\Sigma Pb}{l}, \qquad B = \frac{\Sigma Pa}{l}$$

Liegt P links von A so wird a negativ, liegt es rechts von B, so wird b negativ.

H bedeutet den in A angreifenden, gegebenen Winddruck; X und $H-X$ sind die bei B' und A' hervorgerufenen wagerechten Stützen-

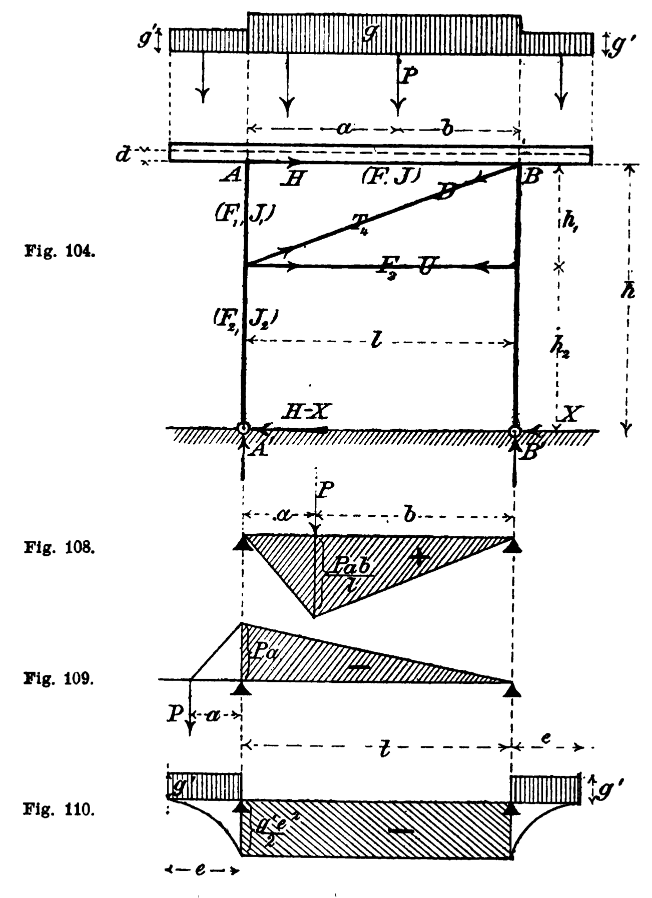


Fig. 104.

Fig. 108.

Fig. 109.

Fig. 110.

widerstände. Die lothrechten Stützendrücke bei A' und B' sind $A' = A - H\frac{h}{l}$ bez. $B' = B + H\frac{h}{l}$.

Damit der Ständer AA' im Gleichgewicht bleibt, muss

$$(H + N)\,h_1 = (X - H)\,h_2$$

sein und hieraus folgt:

$$N = X\frac{h_2}{h_1} - H\frac{h}{h_1}.$$

Ebenso muss sein

$$Uh_1 + Xh = 0 \text{ also}$$

$$U = -X\frac{h}{h_1}.$$

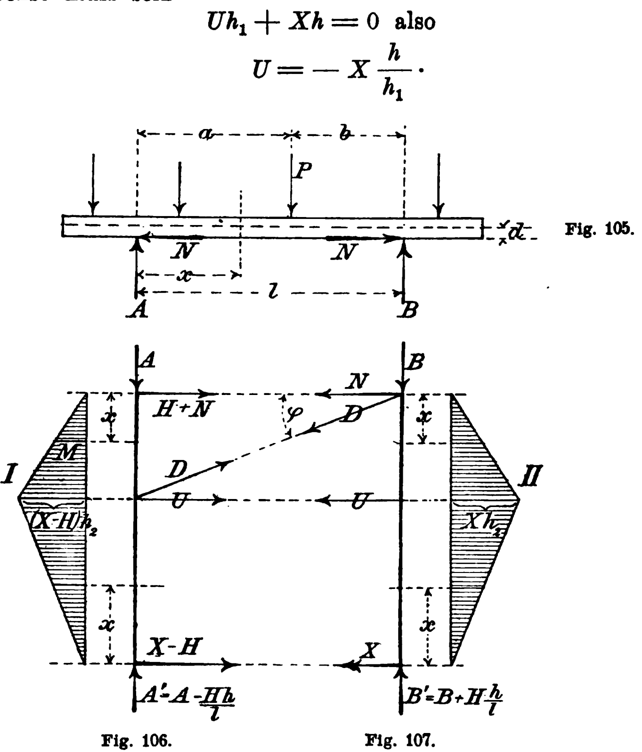


Fig. 105.

Fig. 106.

Fig. 107.

Ferner ergiebt sich für die Diagonale

$$D \sin\varphi = H\frac{h}{l},$$

so dass also D unabhängig von X ist. Das gleiche gilt von den Längskräften der Ständer.

Das Biegungsmoment für einen zwischen A und B gelegenen Querschnitt des Querträgers ist, wenn d der Abstand des Windverbandes von der Achse des Querträgers bedeutet,

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_0 + Nd = \mathrm{M}_0 - H\frac{hd}{h_1} + X\frac{h_2 d}{h_1}$$

wo M_0 das Moment für einen bei A und B frei aufliegenden, nur von den lothrechten Kräften A, B, P beanspruchten Balken AB ist. Die Momente für die Querschnitte der ausgekragten Theile des Querträgers sind unabhängig von X.

Für die Ständer ergeben sich auf Grund der Momentenflächen I und II die folgenden Biegungsmomente. Es ist an der Stelle x

des linken Theiles h_1 ..... $\mathrm{M} = (X - H)\, h_2 \dfrac{x}{h_1}$

„ „ „ h_2 ..... $\mathrm{M} = (X - H)\, x$

„ rechten „ h_1 ..... $\mathrm{M} = X h_2 \dfrac{x}{h_1}$

„ „ „ h_2 ..... $\mathrm{M} = Xx.$

Die Elasticitätsgleichung

$$\int \frac{\mathrm{M}}{EJ} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X} dx + \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X} dx$$

lautet hiernach:

$$\frac{1}{EJ} \int_0^l \left(\mathrm{M}_0 - H \frac{hd}{h_1} + X \frac{h_2 d}{h_1} \right) \left(\frac{h_2 d}{h_1} \right) dx$$

$$+ \frac{1}{EF} \int_0^l \left(X \frac{h_2}{h_1} - H \frac{h}{h_1} \right) \left(\frac{h_2}{h_1} \right) dx + \frac{1}{EJ_1} \int_0^{h_1} (X - H)\, h_2 \frac{x}{h_1} \left(h_2 \frac{x}{h_1} \right) dx$$

$$+ \frac{1}{EJ_2} \int_0^{h_2} (X - H)\, x \cdot x\, dx + \frac{1}{EJ_1} \int_0^{h_1} X h_2 \frac{x}{h_1} \cdot h_2 \frac{x}{h_1}\, dx$$

$$+ \frac{1}{EJ_2} \int_0^{h_2} X x \cdot x\, dx + \frac{1}{EF_3} X \frac{h}{h_1} \cdot \frac{h}{h_1} l = 0.$$

Die beiden ersten Integrale beziehen sich auf den Querträger, die folgenden der Reihe nach auf den linken Ständertheil h_1, den linken Theil h_2, den rechten Theil h_1, den rechten Theil h_2, den Stab U.

Nach Ausführung der Integrationen findet man:

$$X = \frac{1}{C} \left\{ - \frac{h_2 d}{h_1} \int \mathrm{M}_0 dx + H \left[\frac{J}{F} \frac{h h_2 l}{h_1^2} + \frac{J h_2^2}{3 J_1} h + \frac{h_2 h d^2 l}{h_1^2} \right] \right\}$$

wo

$$C = \frac{l h_2^2}{h_1^2} \left(d^2 + \frac{J}{F} \right) + \frac{2 J h_2^2 h}{3 J_1} + \frac{J}{F_3} \frac{h^2 l}{h_1^2}$$

Das Integral $\int \mathrm{M}_0 dx$ ist gleich dem Inhalte des zwischen A und B gelegenen Theiles der $\mathrm{M}_0 =$ Fläche. Einer Last zwischen A und B entspricht (vgl. Fig. 108):

$$\int \mathrm{M}_0 dx = \frac{Pab}{2},$$

und einer links von A gelegenen Last

$$\int \mathrm{M}_0 dx = - \frac{Pal}{2} \quad \text{(Fig. 109)}$$

ebenso einer rechts von B angreifenden Last

$$\int \mathrm{M}_0 dx = -\frac{Pbl}{2}.$$

Eine gleichmässige Belastung g f. d. Längeneinheit, die zwischen A und B aufgebracht wird, bringt hervor (vergl. Seite 109):

$$\int \mathrm{M}_0 dx = \frac{gl^3}{12}$$

und die gleichmässige Belastung g' f. d. Längeneinheit der Kragträger erzeugt das Stützenmoment (Fig. 110)

$$\mathrm{M}_A = -\frac{g'e^2}{2} \text{ mithin}$$

$$\int \mathrm{M}_0 dx = -\frac{g'e^2 l}{2}.$$

Aufgabe 11. Es ist ein ebener Stabzug (Fig. 111) zu untersuchen, der an den Enden (A und B) fest eingespannt ist und von gegebenen, in der Ebene des Stabzuges gelegenen Lasten P beansprucht wird. In den Ecken seien die Stäbe starr miteinander verbunden. Wären die Stützenwiderstände K_a und K_b bekannt, so liessen sich die Momente M und Längskräfte N für sämmtliche Querschnitte leicht berechnen. Wir zerlegen K_a nach lothrechter und wagerechter Richtung in A und H_a, bezeichnen den Abstand der Kraft H_a von der Einspannungsstelle mit k_a (nach oben positiv gezählt) und setzen

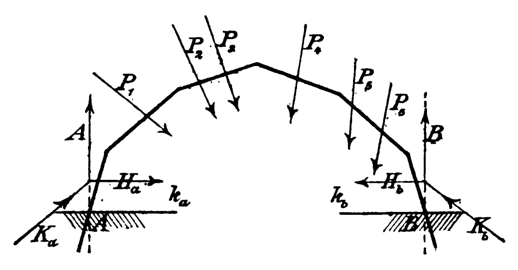


Fig. 111.

$$[1]\quad H_a k_a = M_A.$$

M_A heisst das Einspannungsmoment bei A. Ebenso zerlegen wir K_b in B und H_b und setzen

$$[2]\quad H_b k_b = M_B.$$

Da zur vollständigen Bestimmung der Stützenwiderstände, nämlich zur Ermittlung der sechs Unbekannten A, B, H_a, H_b, M_A, M_B nur drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen, so müssen drei Elasticitätsbedingungen aufgestellt werden. Hierbei wollen wir den stets unwesentlichen Einfluss der Längskräfte N vernachlässigen und (von

Temperaturänderungen und Stützenverschiebungen absehend) nur die Biegungsarbeit $\int \frac{\mathrm{M}^2 ds}{2EJ}$ zu einem Kleinstwerthe machen, wo ds die Länge eines Elementes einer Stabachse bedeutet.

Zunächst machen wir den Stabzug auf irgend eine Art statisch bestimmt, beispielsweise durch Anordnung eines auf wagerechter Bahn beweglichen Auflagergelenkes A und eines festen Auflagergelenkes bei B.*) Ist dann R die Mittelkraft sämmtlicher Lasten P, und sind r_a und r_b die Hebelarme von R in Bezug auf die Gelenke A und B, so erhält man mit den aus der Fig. 112 ersichtlichen Bezeichnungen die Stützenwiderstände:

$$[3] \quad A_0 = \frac{Rr_b}{l}, \; B_0 = \frac{Rr_a}{l}, \; H_o = R \cos \alpha;$$

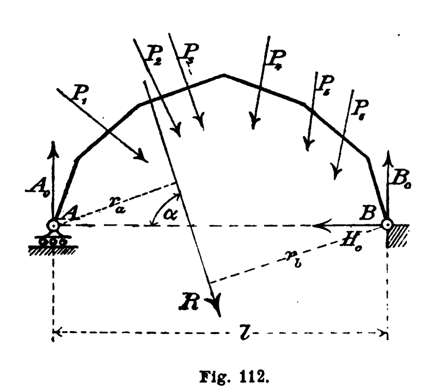


Fig. 112.

dieselben mögen im Verein mit den Lasten P die Biegungsmomente M_0 erzeugen.

Nun betrachten wir gesondert den Einfluss der Kräfte, welche bei A und B hinzuzufügen sind, damit die wirkliche Stützung (nämlich Einspannung bei A und B) herbeigeführt werde. Dieses Kräftesystem, welches für sich im Gleichgewicht sein muss, ist in Fig. 113 angegeben; es besteht aus den entgegengesetzt gleichen wagerechten Widerständen X, den entgegengesetzt gleichen lothrechten Widerständen Y und aus zwei bei A bezieh. B angreifenden Kräftepaaren, deren Momente gleich M_A und M_B sind und die wir kurz die Kräftepaare M_A und M_B nennen wollen.

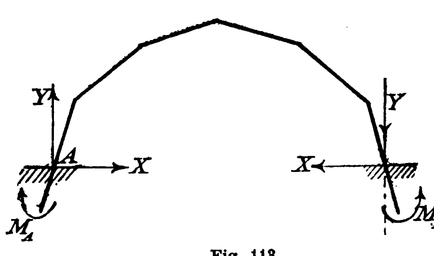


Fig. 113.

Zwischen M_A und M_B besteht die Beziehung (Gleichgewichtsbedingung):

$$[4] \quad \mathrm{M}_A + Yl - \mathrm{M}_B = 0.$$

Hat man X, Y, M_A mit Hilfe der Elasticitätsbedingungen er-

*) Diese Stützung erweist sich für die hier ins Auge gefassten Anwendungen als besonders vortheilhaft.

mittelt, so findet man

$$[5] \quad \begin{cases} A = A_0 + Y; & B = B_0 - Y \\ H_a = X \quad ; & H_b = H_0 + X \end{cases}$$

und ist dann im Stande, die Widerstände K_a und K_b nach Lage und Grösse zu bestimmen.

Eine wesentliche Vereinfachung der ganzen Rechnung erzielt man nun, wenn man den Angriffspunkt der Kräfte X, Y von A nach O verlegt, Fig. 114, und die Lage von O so bestimmt, dass jede der drei Elasticitätsgleichungen nur eine statisch nicht bestimmbare Grösse enthält. Das Kräftepaar M_A ist durch ein anderes Kräftepaar Z zu ersetzen, so zwar, dass mit den in Fig. 114 angegebenen Koordinaten von O:

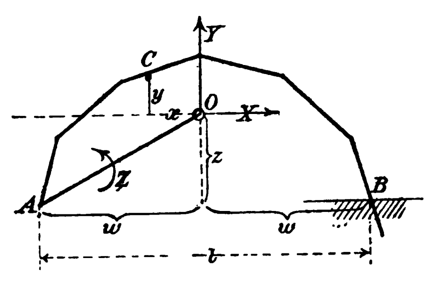


Fig. 114.

$$Xz - Yw - Z = M_A$$

ist.

Wird der Stabzug auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz bezogen, dessen Ursprung der Punkt O ist, dessen positive y-Achse die Richtung von $+Y$ und dessen positive x-Achse die entgegengesetzte Richtung von $+X$ hat, so ist der Einfluss von X, Y, Z auf das Moment für irgend einen Querschnitt C

$$M = -Xy - Yx - Z \quad .$$

Dabei ist das Moment der am Theile AC des Stabzuges angreifenden äusseren Kräfte positiv angenommen, wenn es rechts herum (d. h. im Sinne des Uhrzeigers) dreht.*) Im Ganzen entsteht

$$[6] \quad M = M_0 - Xy - Yx - Z$$

und insbesondere an der Stelle A:

$$[7] \quad M_A = + Xz - Yw - Z.$$

X, Y und Z berechnen wir mittels der Bedingungen

$$[8] \quad \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} ds = 0; \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial Y} ds = 0; \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial Z} ds = 0;$$

und erhalten wegen

$$\frac{\partial M}{\partial X} = -y, \frac{\partial M}{\partial Y} = -x, \frac{\partial M}{\partial Z} = 1 \text{ die Gleichungen:}$$

*) Das Moment der am Stücke BC angreifenden Kräfte ist dann bekanntlich positiv, wenn es links drehend ist.

$$[9] \quad \begin{cases} \int \left(M_0 - Xy - Yx - Z\right) \frac{y\,ds}{EJ} = 0 \\ \int \left(M_0 - Xy - Yx - Z\right) \frac{x\,ds}{EJ} = 0 \\ \int \left(M_0 - Xy - Yx - Z\right) \frac{ds}{EJ} = 0. \end{cases}$$

Jede dieser Gleichungen multiplicieren wir mit dem beliebig grossen, konstanten Trägheitsmomente J_o, ferner setzen wir eine überall gleiche Elasticitätsziffer E voraus, und schliesslich wählen wir den bislang willkürlich angenommenen Punkt O so, dass

$$[10] \quad \int y \frac{J_o}{J}\,ds = 0, \int x \frac{J_o}{J}\,ds = 0, \int xy \frac{J_o}{J}\,ds = 0$$

wird. Indem wir dann zur Abkürzung

$$[11] \quad \frac{J_o}{J}\,ds = ds'$$

setzen, erhalten wir die einfachen Ergebnisse

$$[12] \quad \begin{cases} X = \dfrac{\int M_0 y\,ds'}{T_x}, & \text{wo } T_x = \int y^2\,ds' \\ Y = \dfrac{\int M_0 x\,ds'}{T_y} & \text{„ } T_y = \int x^2\,ds' \\ Z = \dfrac{\int M_0\,ds'}{G} & \text{„ } G = \int ds'. \end{cases}$$

Die Gleichungen [10] lassen sich wie folgt deuten. Schreibt man dem Stabtheilchen ds das Gewicht $\frac{J_o}{J}\,ds = ds'$ zu, so bedeuten die beiden ersten Integrale in den Gleichungen [10] die statischen Momente des Stabzuges in Bezug auf die x-Achse und die y-Achse, das dritte Integral aber stellt das Centrifugalmoment des Stabzuges vor. Damit die Gleichungen 10 erfüllt werden, muss der Punkt O mit dem Schwerpunkte des Stabzuges zusammenfallen; ferner müssen die Achsen x, y Hauptachsen sein. In dem in der Fig. 114 vorausgesetzten Falle eines in Bezug auf die Lothrechte durch die Mitte symmetrischen Stabzuges $\left(w = \frac{1}{2} l\right)$ fällt die y-Achse mit der Symmetrieachse zusammen.

Die Integrale T_x und T_y bedeuten die Trägheitsmomente des Stabzuges in Bezug auf die x-Achse bezw. die y-Achse und G ist das gesammte Gewicht des Stabzuges. Bei Berechnung dieser Integrale ist

es stets zulässig, den Stabzug in prismatische Theile zu zerlegen. Man erhält dann für ein solches Stabstück konstanten Querschnitts $G = \frac{J_c}{J} s = s'$ und, bezogen auf irgend eine Achse (A), mit den Bezeichnungen in Fig. 115,

$$[13] \quad T = \frac{J_c}{J} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta^2 ds = \frac{J_c}{J} \frac{1}{\sin \alpha} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta^2 d\eta = \frac{J_c}{J} \frac{s}{\eta_2 - \eta_1} \frac{\eta_2^3 - \eta_1^3}{3}$$
$$= \frac{1}{3} s' (\eta_2^2 + \eta_2 \eta_1 + \eta_1^2).$$

Behufs übersichtlicher Darstellung der die Zähler von X, Y, Z bildenden Integrale, zeichnen wir für die einzelnen prismatischen Stabstücke die M_0-Linien, indem wir die Momente M_0 von der Stabachse

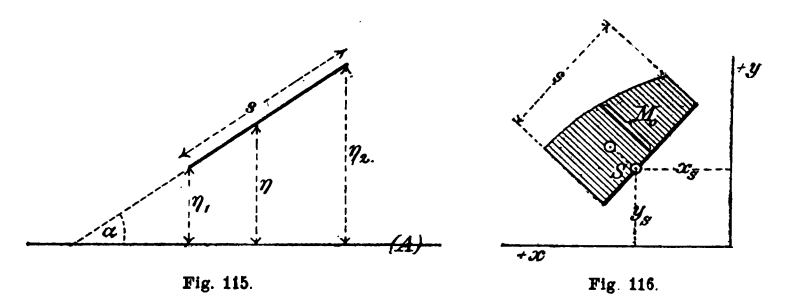


Fig. 115. Fig. 116.

aus als Ordinaten auftragen, Fig. 116. Sodann bestimmen wir den Schwerpunkt der zu einem Theile s gehörigen M_0-Fläche, ferner den diesem Schwerpunkte entsprechenden Punkt S der Stabachse, bezeichnen die Koordinaten dieses Punktes mit x_S, y_S, den Inhalt der M_0-Fläche mit $\mathfrak{F}_0$ und erhalten für den Theil s:

$$[14] \quad \begin{cases} \int M_0 \, y \, \frac{J_c}{J} ds = \frac{J_c}{J} \mathfrak{F}_0 y_S \\ \int M_0 \, x \, \frac{J_c}{J} ds = \frac{J_c}{J} \mathfrak{F}_0 \, x_S. \end{cases}$$

Diese Werthe lassen sich deuten als die auf die Achse x bezieh. y bezogenen statischen Momente eines dem Punkte S zugeschriebenen Gewichtes $\frac{J_c}{J} \mathfrak{F}_0$. Bezeichnet man also mit $\mathfrak{S}_x$ und $\mathfrak{S}_y$ die Summe der statischen Momente aller auf die beschriebene Weise gebildeten Gewichte $\frac{J_c}{J} \mathfrak{F}_0$ in Bezug auf die Achsen x bezieh. y, so erhält man

$$[15] \quad X = \frac{\mathfrak{S}_x}{T_x}, \quad Y = \frac{\mathfrak{S}_y}{T_y}$$

während

$$[16] \quad Z = \frac{\Sigma \frac{J_c}{J} \mathfrak{F}_0}{G}$$

ist.

Werden einzelne Stäbe über die Verbindungsstellen mit den Nachbarstäben hinaus verlängert, Fig. 117, so sind diese überstehenden Enden bei Berechnung der Trägheitsmomente T und Gewichte G beseitigt zu denken, weil die Momente nur innerhalb der Verbindungsstellen abhängig sind von X, Y, Z. Aus demselben Grunde kommen auch die M_0-Flächen der überstehenden Enden bei Berechnung der Flächeninhalte $\mathfrak{F}_0$ und Ermittlung der Schwerpunkte dieser Flächen nicht in Betracht. Die an den Verlängerungen angreifenden Kräfte sind natürlich von Einfluss auf X, Y, Z, da sie ja von Einfluss auf die innerhalb der Verbindungsstellen enstehenden M_0 sind.

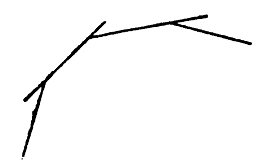


Fig. 117.

Wir wenden jetzt die abgeleiteten allgemeinen Gesetze auf den in Fig. 118 dargestellten Sonderfall an. Es handele sich wie in Aufgabe 10 um die Endversteifung einer Balkenbrücke. Der Querschnitt des Querträgers habe das Trägheitsmoment J, der Ständerquerschnitt das Trägheitsmoment J_v. Es sei $J_c = J$ gewählt. Dann ist das Gewicht des Querträgers gleich l, das Gewicht eines Ständers:

$$\frac{J}{J_v} h = h'$$

also im Ganzen

$$[17] \quad G = l + 2h'.$$

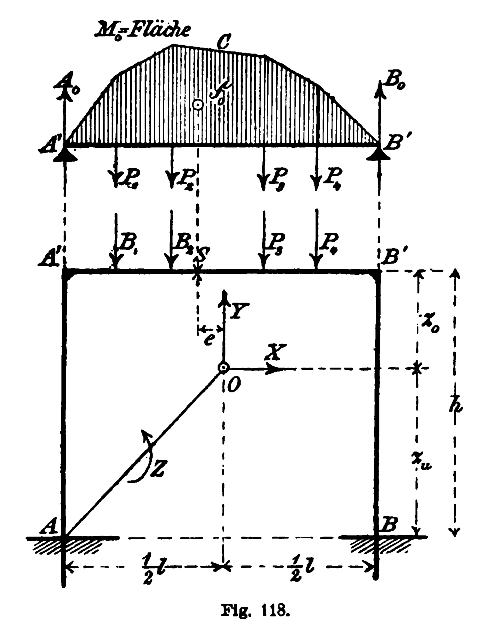


Fig. 118.

Der Abstand z_o des Schwerpunktes O von der Achse des Querträgers ergiebt sich aus der Momentengleichung

$$[18] \quad z_o G = 2h' \cdot \frac{h}{2} = h'h \text{ zu}$$

$$[19] \quad z_o = \frac{h'h}{l + 2h'}.$$

Das Trägheitsmoment des Stabzuges in Bezug auf die Achse des Querträgers ist

$$T \doteq 2 \cdot \frac{1}{3} \frac{J}{J_v} h^3 = \frac{2}{3} h'h^2 = \frac{2}{3} h z_o G \text{ mithin}$$

$$[20] \quad \begin{cases} T_x = T - G z_o^2 = z_o G \left(\frac{2}{3} h - z_o\right) \text{ oder} \\ T_x = \frac{hh'}{3} (2h - 3z_o) \end{cases}$$

wofür man auch, wegen $h'h = z_o l + 2h'z_o$ schreiben darf:

$$[21] \quad T_x = \frac{hz_o}{3} (2l + h')$$

Das Trägheitsmoment für die y-Achse ist:

$$T_y = \frac{1}{12} l^3 + 2 \frac{J}{J_v} h \left(\frac{l}{2}\right)^2 \quad \text{d. i.}$$

$$[22] \quad T_y = \frac{l^2}{12} (l + 6h').$$

Auf den Querträger $A'B'$ mögen beliebige lothrechte Lasten P wirken; die Ständer hingegen seien unbelastet. Die M_0-Fläche stimmt dann mit der Momentenfläche eines einfachen Balkens $A'B'$, der an den Enden frei aufliegt, überein; ihr Inhalt sei $\mathfrak{F}_0$, ihr Schwerpunkt habe von der y-Achse den Abstand e. Die statischen Momente $\mathfrak{S}_x$ und $\mathfrak{S}_y$ sind

$$\mathfrak{S}_x = \mathfrak{F}_0 z_o, \quad \mathfrak{S}_y = \mathfrak{F}_0 e$$

und man erhält

$$[23] \quad H = X = \frac{\mathfrak{F}_0 z_o}{T_x} = \frac{3\mathfrak{F}_0}{h(2l + h')};$$

$$[24] \quad Y = \frac{\mathfrak{F}_0 e}{T_y}; \quad Z = \frac{\mathfrak{F}_0}{G}.$$

Setzt man den wagerechten Stützenwiderstand $H = X$ mit dem Kräftepaare, dessen Moment gleich Z ist, zu einer Resultirenden (deren Grösse wieder $= X$ ist) zusammen, so findet man den Angriffspunkt L derselben (vergl. Fig. 119) mit Hilfe der Gleichung

$$X \cdot \overline{LL'} = X z_u - Z,$$

woraus

$$\overline{LL'} = z_u - \frac{T_x}{z_o G} = z_u - \left(\frac{2h}{3} - z_o\right) = \frac{h}{3}.\text{*)}$$

Der Neigungswinkel β der Mittelkraft R aus Y und X ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{Y}{X} = \frac{e T_x}{z_o T_y} = \frac{e}{v},$$

wo

$$[25] \quad v = \frac{l^2(l + 6h')}{4h(2l + h')}$$

eine von der Belastung unabhängige Strecke bedeutet. Bestimmt man also in der y-Achse im Abstande v von der Achse des Querträgers einen festen Punkt V und verbindet V mit dem lothrecht unter dem Schwerpunkte der M_0-Fläche gelegenen Punkte S der Querträgerachse durch eine Gerade, so steht die Richtung der Kraft R senkrecht auf dieser Geraden. Hat man hiernach die Richtung von R bestimmt, so findet man die Grösse von R, indem man H mittels Gleich. [23] berechnet.

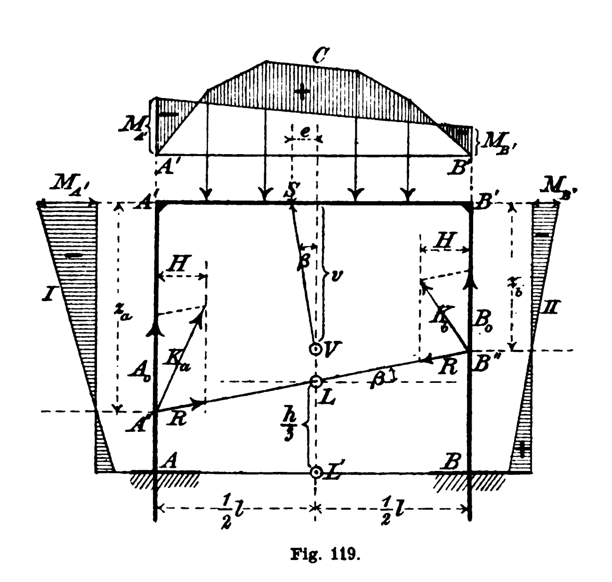


Fig. 119.

Setzt man schliesslich R mit dem Stützenwiderstande A_0 des einfachen Balkens $A'B'$ zusammen, so erhält man den Stützenwiderstand (Kämpferdruck) K_a und ganz ebenso findet man K_b als Mittelkraft aus R und B_0. Bezeichnet man mit z_a und z_b die Entfernungen der Querträgerachse von den Punkten A'' und B'', in denen die Ständerachsen von den Kräften R geschnitten werden, so sind die Angriffsmomente für die Endquerschnitte A' und B' des Querträgers:

$$[26] \quad M_{A'} = -H z_a; \quad M_{B'} = -H z_b$$

*) Nach Gleichung 20 ist $\frac{T_x}{z_o G} = \frac{2h}{3} - z_o$.

und man erhält die Momentenfläche des Querträgers, indem man von der M_0-Fläche $A'CB'$ ein Trapez in Abzug bringt, dessen Endhöhen gleich $M_{A'}$ bezieh. $M_{B'}$ sind. Durch die Momente $M_{A'}$ und $M_{B'}$ sowie durch die Punkte A'', B'' sind auch die Momentenflächen I u. II der Ständer bestimmt.

Es möge noch der Einfluss einer zwischen A' und B' aufgebrachten Einzellast P, deren Abstand von der Mitte gleich ξ sei, für sich verfolgt werden. Die M_0-Fläche ist ein Dreieck von der Höhe $\frac{Pab}{l}$ (Fig. 120), dessen Schwerpunkt im Abstande $e = \frac{1}{3}\xi$ von der Mitte liegt. Bestimmt man also auf der Mittellinie den festen Punkt V' im Abstande $3v$ von $A'B'$ und verbindet man V' mit dem Angriffspunkte C von P durch eine Gerade, so ist $A''B'' \perp V'C$. Die Kämpferdrücke K_a und K_b treffen P in demselben Punkte C'; der lothrechte Abstand n dieses Punktes von der Geraden $A''B''$ ist bestimmt durch die Gleichung*)

$$\frac{n}{a} = \frac{A_0}{H} = \frac{Pb}{lH},$$

woraus

Fig 120.

$$[27] \quad n = \frac{Pab}{lH}.$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{F}_0 = \frac{Pab}{l} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pab}{2}$$

ferner

$$[28] \quad H = \frac{3\,\mathfrak{F}_0}{h\,(2l + h')} \text{ d. i.}$$

*) Zum Beweise denke man K_a wie in Fig. 119 in A_0 und R zerlegt.

$$[29] \quad H = \frac{3Pab}{2h(2l+h')}$$

und man erhält daher für n den von der Lage der Last unabhängigen, festen Werth

$$[30] \quad n = \frac{2h}{3l}(2l+h').$$

Bewegt sich P von A' nach B' so beschreibt der Punkt C' eine Parabel (die **Kämpferdrucklinie**), deren Achse mit der Mittellothrechten zusammenfällt und deren Scheitel C_0 von L den Abstand n hat. Der äusserste Parabelpunkt C'' ist bestimmt durch $TL \perp A'V'$ und $\overline{TC''} = n$.

Noch sei hervorgehoben, dass man die in der Fig. 120 schraffirte, von den Geraden $A'B'$, $A''C'$, $C'B''$, $A'A''$, $B'B''$ begrenzte Fläche als Momentenfläche des Balkens $A'B'$ auffassen darf, denn die auf die Achse $A'B'$ bezogenen Ordinaten z des Linienzuges $A''C'B''$ geben mit H multiplicirt die Biegungsmomente für den Balken $A'B'$. Dem Querschnitte D entspricht z. B. $M = +Hz$, was leicht einzusehen ist; man braucht nur K_b von B'' nach D' hin zu verschieben und dort in B und H zu zerlegen. Formt man H durch Einführung von n um in

$$[31] \quad H = \frac{Pab}{ln},$$

so erkennt man, dass die Einflusslinie für H eine symmetrische Parabel ASB ist, deren Pfeilhöhe

$$[32] \quad f = \frac{1}{4}\frac{l}{n}$$

ist. Der Last P entspricht $H = P\eta$.

Wirkt auf den über A' und B' hinaus verlängerten Querträger (Figur 121) links von A' im Abstande a von A' eine Last P, so ist die M_0 = Fläche (welche jetzt negativ ist) ein Dreieck von der Höhe Pa. Der zur Strecke l gehörige Theil dieser Fläche hat den Inhalt

$$\mathfrak{F}_0 = -\frac{Pal}{2},$$

es entsteht also

$$[33] \quad H = \frac{-3Pal}{2h(2l+h')} = -\frac{Pa}{n}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes der Fläche $\mathfrak{F}_0$ von der Mittellinie beträgt $e = \frac{1}{6}l$, weshalb

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{e}{v} = \frac{\frac{1}{6}l}{v} = \frac{\frac{1}{2}l}{3v},$$

und hieraus folgt $A''B'' \perp A'V'$. Für A_0 und B_0 erhält man

$$A_0 = \frac{Pb}{l}, \quad B_0 = -\frac{Pa}{l}.$$

Die Lage des Punktes C'', in welchem der Kämpferdruck K_b die Achse des linken Ständers schneidet, ist durch die Gleichung

$$\overline{A''C''} : l = B_0 : H$$

bestimmt, und zwar folgt hieraus

$$\overline{A''C''} = n.$$

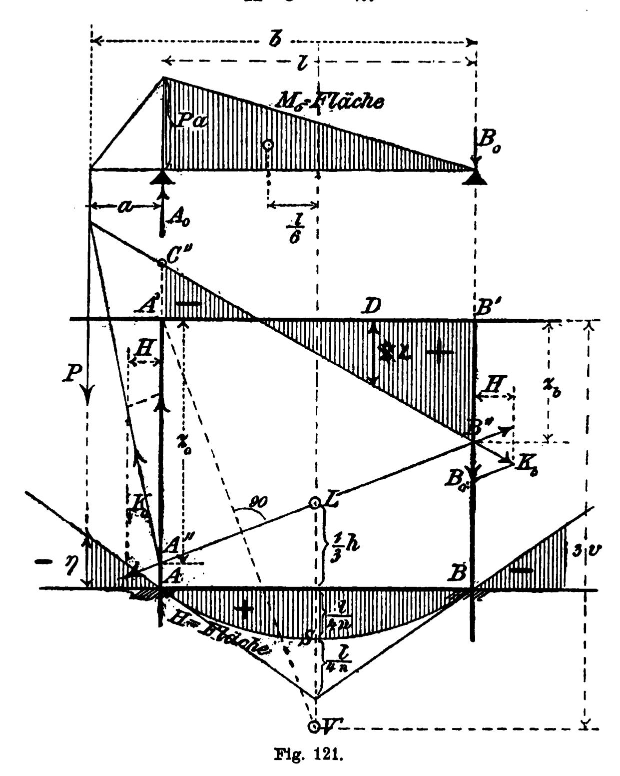


Fig. 121.

Die Fläche zwischen den Graden $A'B'$ und $C''B''$ darf als Momentenfläche des Balkens $A'B'$ aufgefasst werden. Dem Querschnitt D entspricht $M = + Hz$. Für den Querschnitt B' ist $M = Hz_b$ während man an der Stelle A' entweder $M = - Pa$ oder $M = H(n - z_a)$ erhält, jenachdem man den Schnitt links oder rechts von der Mittellinie des Ständers AA' führt.*) Den Ständerquerschnitten A', B' entsprechen die Momente $M_{A'} = - Hz_a$, $M_{B'} = - Hz_b$.

*) In Wirklichkeit ist dieser schroffe Uebergang selbstverständlich nicht vorhanden.

Die Einflusslinie für H infolge von Lasten, die links von A' oder rechts von B' liegen, besteht (wegen $H = -P\frac{a}{n}$) aus den Endtangenten der Parabel ASB.

Greift an der Endversteifung eine wagerechte Kraft P an, Fig. 122*) so führt man als statisch bestimmtes Hauptsystem zweckmässig den bei B fest eingespannten, bei A freien Stabzug ein. Es wird dann nur der Ständer $B'B$ durch Momente M_0 beansprucht und der linke Kämpferdruck ist die Mittelkraft aus den Widerständen X und Y und dem Kräftepaare Z. Bedeutet k den Hebelarm von P in Bezug auf B, so ist die M_0-Fläche ein Dreieck vom Inhalte

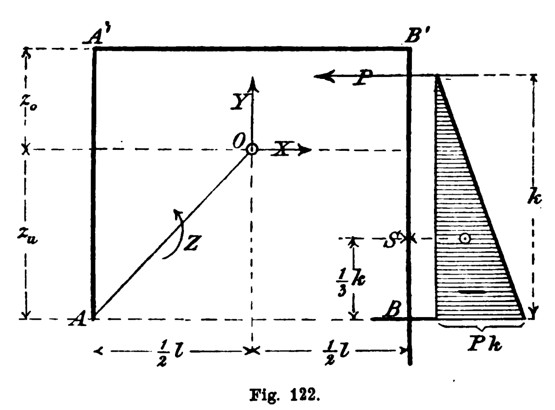


Fig. 122.

$\mathfrak{F}_0 = -Pk\frac{k}{2}$; ihr Schwerpunkt liegt im Abstande $z_u - \frac{k}{3}$ von der x-Achse, und es ist daher

$$\mathfrak{S}_x = -\mathfrak{F}_0 \cdot \frac{J}{J_v}\left(z_u - \frac{k}{3}\right) = +\frac{Pk^2}{2}\left(z_u - \frac{k}{3}\right)\frac{J}{J_v}$$

$$\mathfrak{S}_y = -\mathfrak{F}_0\frac{J}{J_v}\frac{l}{2} \qquad = +\frac{Pk^2 l}{4}\frac{J}{J_v}.$$

Man erhält also:

$$[34] \quad X = \frac{Pk^2\left(z_u - \frac{k}{3}\right)}{2\,T_x}\frac{J}{J_v}, \quad Y = \frac{Pk^2 l}{4\,T_y}\frac{J}{J_v}, \quad Z = -\frac{Pk^2}{2G}\frac{J}{J_v}$$

und ist nun im Stande, die Angriffsmomente für die Querschnitte A, A', B', B zu berechnen. Es ist

*) Es handelt sich hier um den Einfluss des Winddrucks. Der Windverband liegt in der Regel unterhalb der Achse des Querträgers.

$$[35]\quad \begin{cases} M_A = + X z_u - Y \frac{l}{2} - Z \\ M_{A'} = - X z_o - Y \frac{l}{2} - Z \\ M_{B'} = - X z_o + Y \frac{l}{2} - Z \\ M_B = + X z_u + Y \frac{l}{2} - Z - Pk. \end{cases}$$

Durch diese vier Momente ist die Beanspruchung des Rahmens auf Biegung vollständig bestimmt.

Aufgabe 12. Untersuchung der Träger der in Fig. 123 skizzirten eisernen Treppe.

Wir versehen die Podestträger mit den Ordnungsziffern 1, 2, . . r, $(r+1)$, . . und betrachten zunächst die Wange $(r-1)-r$ und zwar unter der Voraussetzung gelenkartiger Endbefestigungen, Fig. 124.

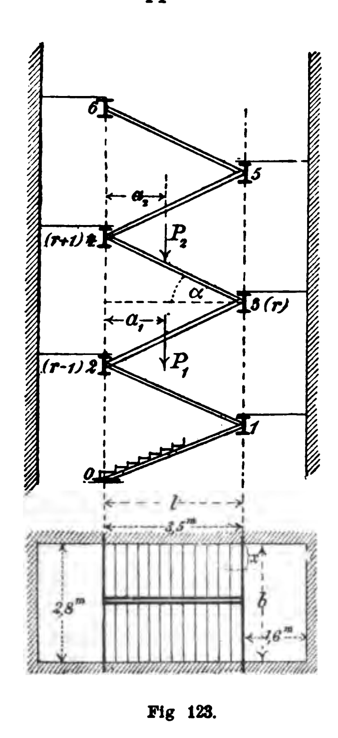


Fig 123.

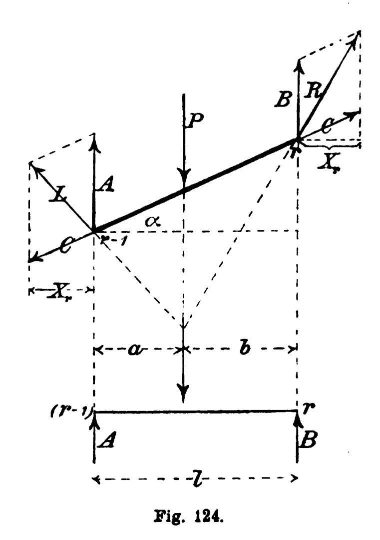


Fig. 124.

Eine lothrechte Last P ruft bei $r-1$ und r schräge Widerstände L und R hervor, die nach lothrechter Richtung und nach der Richtung der Wangenachse in A und C bezw. B und C zerlegt werden. Die Seitenkräfte C sind entgegengesetzt gleich und auf statischem Wege nicht bestimmbar; ihre wagerechte Seitenkraft werde mit X_r bezeichnet.

Für A und B erhält man aus den Momentengleichungen (in Bezug auf r und $r-1$):

$$Al - Pb = 0; \qquad Bl - Pa = 0$$

die Werthe

$$A = \frac{Pb}{l}, \qquad B = \frac{Pa}{l},$$

welche mit den Auflagerdrücken eines einfachen Balkens übereinstimmen, dessen Stützweite gleich der Horizontalprojektion l der Wange ist. Infolge dessen sind auch die Biegungsmomente für den ansteigenden Träger und für den wagerechten Träger $(r-1)-r$ gleich gross. Bedeutet also q die Belastung für die Längeneinheit der Horizontalprojektion l so ist das grösste Moment $M = \frac{1}{8} q l^2$, Fig. 125, und die Beanspruchung der Wange:

$$\sigma = \pm \frac{q l^2}{8\,W} + \frac{X_r \sec \alpha}{F}$$

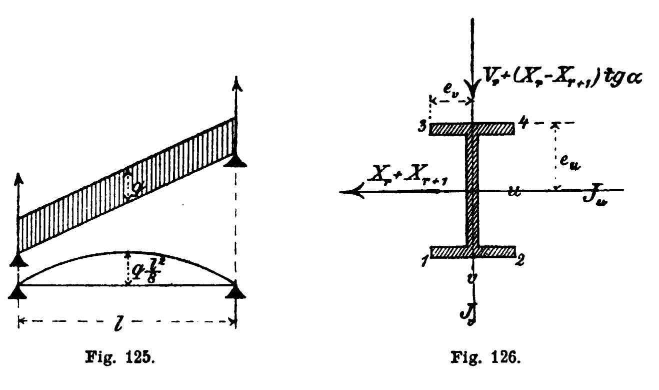


Fig. 125. Fig. 126.

wo W das Widerstandsmoment und F den Inhalt des Querschnitts bedeutet. Das zweite Glied ist unwesentlich und darf stets vernachlässigt werden.

Auf den r^{ten} Podestträger werden nun seitens der Wangen die folgenden Kräfte ausgeübt, Fig. 126. In lothrechter Richtung wirkt die Belastung: $V_r + (X_r - X_{r+1})\,\mathrm{tg}\,\alpha$, wo V_r den Einfluss der vorhin mit A und B bezeichneten Kräfte bedeutet, ferner in wagerechter Richtung die Belastung $X_r + X_{r+1}$. Die beiden Lasten P_1 und P_2 in Fig. 123 würden z. B. erzeugen: $V_r = \frac{P_1 a_1}{l} + \frac{P_2 a_2}{l}$. Alle diese Kräfte dürfen in der Mitte des Podestträgers angreifend angenommen werden; sie erzeugen für den nach Fig. 126 auf ein Achsenkreuz u, v bezogenen Querschnitt, im Abstand x von der Stütze (Fig. 123), die Biegungs-

momente*)

$$\text{I}\quad \begin{cases} \mathrm{M}_u = \frac{1}{2}\,[V_r + (X_r - X_{r+1})\,\mathrm{tg}\,\alpha]\,x \\ \mathrm{M}_v = \frac{1}{2}\,(X_r + X_{r+1})\,x\,. \end{cases}$$

Ausserdem verursacht die Belastung des Podestes noch ein Moment M_{u}, dessen Grösstwerth bei $x = \frac{1}{2}\,b$

$$\mathrm{M}_{u} = \frac{1}{8}\,q_r b^2$$

ist, wenn q_r die gleichmässige Belastung für die Einheit der Länge b bedeutet. Die Momente M_u, M_v nehmen ebenfalls an der Stelle $x = \frac{1}{2}\,b$ ihre Grösstwerthe an, weshalb die Berechnung der Beanspruchung auf Grund von

$$\text{II}\quad \begin{cases} \mathrm{M}_u = \frac{1}{4}\,[V_r + (X_r - X_{r+1})\,\mathrm{tg}\,\alpha]\,b + \frac{1}{8}\,q_r b^2 \\ \mathrm{M}_v = \frac{1}{4}\,(X_r + X_{r+1})\,b \end{cases}$$

zu erfolgen hat. Sind J_u und J_v die Querschnittsträgheitsmomente in Bezug auf die Achsen u und v, ferner e_u und e_v die Abstände der äussersten Querschnittspunkte, so sind (für den hier vorausgesetzten Fall eines symmetrischen Doppel-T-Profils) die Beanspruchungen σ_1 und σ_2 in den in der Fig. 126 mit 1 und 2 bezeichneten Eckpunkten:

$$\text{III}\quad \begin{cases} \sigma_1 = + \frac{\mathrm{M}_u e_u}{J_u} + \frac{\mathrm{M}_v e_v}{J_v} = \frac{e_u}{J_u}\left(\mathrm{M}_u + \frac{e_v}{e_u}\,\frac{J_u}{J_v}\,\mathrm{M}_v\right) \\ \sigma_2 = + \frac{\mathrm{M}_u e_u}{J_u} - \frac{\mathrm{M}_v e_v}{J_v} = \frac{e_u}{J_u}\left(\mathrm{M}_u - \frac{e_v}{e_u}\,\frac{J_u}{J_v}\,\mathrm{M}_v\right). \end{cases}$$

Für die Eckpunkte 3 und 4 erhält man

$$\sigma_3 = -\sigma_2 \qquad \text{und } \sigma_4 = -\sigma_1 .$$

Das Moment M_u ist stets positiv, hingegen wird M_v positiv oder negativ ausfallen je nachdem $X_r + X_{r+1}$ positiv oder negativ ist. Im ersten Falle entstehen die grössten Beanspruchungen an den Stellen 1 und 4, im zweiten Falle an den Stellen 2 und 3.

Die Berechnung der statisch nicht bestimmbaren Grössen X soll

---

*) Der Podestträger muss als an den Enden frei aufliegender Träger berechnet werden. Die Einmauerung der Enden darf nicht als Einspannung betrachtet werden.

(unter Absehung von Temperaturänderungen) mittels der Bedingungen:

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X} dx + \int \frac{\mathrm{M}_u}{EJ_u} \frac{\partial \mathrm{M}_u}{\partial X} dx + \int \frac{\mathrm{M}_v}{EJ_v} \frac{\partial \mathrm{M}_v}{\partial X} dx = 0,$$

deren Anzahl mit der Anzahl der X übereinstimmt, erfolgen. X_r tritt nur in M_u, M_v für den Podestträger $(r-1)$ und r und in N für die beide Träger verbindende Wange auf. Es ist für den $(r-1)$ten Podestträger:

$$\mathrm{M}_u = \frac{x}{2}\left[V_{r-1} + (X_{r-1} - X_r)\operatorname{tg}\alpha\right] + \frac{q_{r-1}x(l-x)}{2}; \quad \frac{\partial \mathrm{M}_u}{\partial X_r} = -\frac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha$$

$$\mathrm{M}_v = \frac{x}{2}(X_{r-1} + X_r) \qquad \frac{\partial \mathrm{M}_v}{\partial X_r} = +\frac{x}{2}$$

für den r^{ten} Podestträger:

$$\mathrm{M}_u = \frac{x}{2}\left[V_r + (X_r - X_{r+1})\operatorname{tg}\alpha\right] + \frac{q_r x(l-x)}{2}; \quad \frac{\partial \mathrm{M}_u}{\partial X_r} = +\frac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha$$

$$\mathrm{M}_v = \frac{x}{2}(X_r + X_{r+1}) \qquad \frac{\partial \mathrm{M}_v}{\partial X_r} = +\frac{x}{2}$$

für die Wange $(r-1)-r$:

$$N = X_r \sec\alpha \qquad \frac{\partial N}{\partial X_r} = \sec\alpha$$

weshalb die Gleichung $\frac{\partial A}{\partial X_r} = 0$ lautet:

$$\frac{X_r l \sec^3\alpha^{*)}}{F} - 2\int_0^{\frac{1}{2}b} \frac{x^2}{4} \operatorname{tg}\alpha\left[V_{r-1} + q_{r-1}(b-x) + (X_{r-1} - X_r)\operatorname{tg}\alpha\right]\frac{dx}{J_u}$$

$$+ 2\int_0^{\frac{1}{2}b} \frac{x^2}{4}(X_{r-1} + X_r)\frac{dx}{J_v} + 2\int_0^{\frac{1}{2}b} \frac{x^2}{4}\operatorname{tg}\alpha\left[V_r + q_r(b-x)\right.$$

$$\left. + (X_r - X_{r-1})\operatorname{tg}\alpha\right]\frac{dx}{J_u} + 2\int_0^{\frac{1}{2}b} \frac{x^2}{4}(X_r + X_{r+1})\frac{dx}{J_v} = 0$$

und nach Ausführung der Integration:

$$\frac{X_r l \sec^3\alpha}{F} - \frac{b^3}{48J_u}\left[(T_{r-1} - T_r)\operatorname{tg}\alpha + (X_{r-1} - 2X_r + X_{r+1})\operatorname{tg}^2\alpha\right]$$

$$+ \frac{b^3}{48J_v}(X_{r-1} + 2X_r + X_{r+1}) = 0$$

---

*) Für die Wange ist $\int dx = l\sec\alpha$.

wo

$$T_r = V_r + \frac{5}{8} q_r b$$

oder, nach den Grössen X geordnet,

$$X_{r-1} \varkappa' + 2 X_r \varkappa + X_{r+1} \varkappa' = N_r$$

wo

$$\varkappa' = 1 - \frac{J_v}{J_u} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\varkappa = 1 + \frac{J_v}{J_u} \operatorname{tg}^2 \alpha + 24 \frac{J_v l}{F b^3} \sec^3 \alpha$$

$$N_r = \frac{J_v}{J_u} \operatorname{tg} \alpha (T_{r-1} - T_r).$$

Die Zahlen $\varkappa'$ und $\varkappa$ weichen von 1 so wenig ab, dass man stets genügend genau setzen darf:

$$X_{r-1} + 2 X_r + X_{r+1} = N_r$$

und man erhält deshalb für den in Fig. 123 dargestellten Fall einer durch drei Geschosse reichenden Treppe, deren unterste Wange bei 0 ein wagerechtes Gleitlager erhalten möge (weshalb $X_1 = 0$ wird) die fünf Elasticitätsgleichungen:

$$\begin{aligned}
2X_2 + X_3 &= N_2 \\
X_2 + 2X_3 + X_4 &= N_3 \\
X_3 + 2X_4 + X_5 &= N_4 \\
X_4 + 2X_5 + X_6 &= N_5 \\
X_5 + 2X_6 \qquad &= N_6.
\end{aligned}$$

Die Auflösung ergiebt:

$$\begin{aligned}
6X_2 &= 5N_2 - 4N_3 + 3N_4 - 2N_5 + N_6 \\
6X_3 &= -4N_2 + 8N_3 - 6N_4 + 4N_5 - 2N_6 \\
6X_4 &= 3N_2 - 6N_3 + 9N_4 - 6N_5 + 3N_6 \\
6X_5 &= -2N_2 + 4N_3 - 6N_4 + 8N_5 - 4N_6 \\
6X_6 &= N_2 - 2N_3 + 3N_4 - 4N_5 + 5N_6.
\end{aligned}$$

Drückt man die N durch die T aus, so findet man:

$$X_r = \frac{1}{6} \frac{J_v}{J_u} \operatorname{tg} \alpha \, H_r, \text{ wo}$$

$$\begin{aligned}
H_2 &= 5T_1 - 9T_2 + 7T_3 - 5T_4 + 3T_5 - T_6 \\
H_3 &= -4T_1 + 12T_2 - 14T_3 + 10T_4 - 6T_5 + 2T_6 \\
H_4 &= 3T_1 - 9T_2 + 15T_3 - 15T_4 + 9T_5 - 3T_6 \\
H_5 &= -2T_1 + 6T_2 - 10T_3 + 14T_4 - 12T_5 + 4T_6 \\
H_6 &= T_1 - 3T_2 + 5T_3 - 7T_4 + 9T_5 - 5T_6,
\end{aligned}$$

und erhält nun für σ_1 und σ_2 (vergl. Seite 127) nach leichter Zwischenrechnung die Formel

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{e_u b}{4 J_u}\left[V_r + H_r\left(\pm\frac{e_o}{e_u} + \frac{J_o}{J_u}\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{\operatorname{tg}\alpha}{6}\right.$$
$$\left. + H_{r+1}\left(\pm\frac{e_o}{e_u} - \frac{J_o}{J_u}\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{\operatorname{tg}\alpha}{6} + \frac{1}{2}q_r b\right]$$

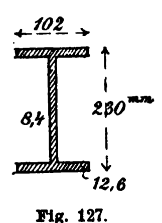


Fig. 127.

wobei das obere Vorzeichen σ_1 liefert, das untere σ_2.

Ist beispielsweise $\operatorname{tg}\alpha = 0,6$ und erhalten die Podestträger das Normalprofil Nr. 23, Fig. 127, mit

$$e_o = 51 \text{ mm}, \; e_u = 115 \text{ mm},$$
$$J_o = 191 \text{ cm}^4, \; J_u = 3657 \text{ cm}^4$$

so entsteht

$$\sigma_1 = \frac{e_u b}{4 J_u}[V_r + 0,05\, H_r + 0,04\, H_{r+1} + 0,5\, q_r b]$$
$$\sigma_2 = \frac{e_u b}{4 J_u}[V_r - 0,04\, H_r - 0,05\, H_{r+1} + 0,5\, q_r b].$$

Insbesondere ergiebt sich für die Beanspruchung σ_1 des Podestträgers 1 (auf deren Berechnung wir uns hier beschränken wollen) wegen $H_r = H_1 = 0$ und $H_r = H_2$:

$$\text{(IV)} \quad \sigma_1 = \frac{e_u b}{4 J_u}[V' + V''] \text{ wo}$$

$$\text{(V)} \quad V' = 1,20\, V_1 - 0,36\, V_2 + 0,28\, V_3 - 0,20\, V_4 + 0,12\, V_5 - 0,04\, V_6$$

$$\text{(VI)} \quad V'' = \frac{1}{8} b\,(5\, q_1 - 1,8\, q_2 + 1,4\, q_3 - 1,0\, q_4 + 0,6\, q_5 - 0,2\, q_6).$$

Der erste dieser beiden Ausdrücke, nämlich V', hängt nur von der Belastung der Wangen ab, der zweite von der Belastung der Podeste.

Liegt eine die Wangen entlang wandernde Last $P = 1$ (Fig. 128) zwischen dem zweiten und dritten Podeste im Abstande x von Träger 2, so erzeugt sie $V_2 = 1\,\frac{l-x}{l}$ un l $V_3 = 1\,\frac{x}{l}$ während alle übrigen V Null werden. Es entsteht dann

$$V' = -0,36\,\frac{l-x}{l} + 0,28\,\frac{x}{l}$$

das ist eine Funktion ersten Grades von x, woraus folgt, dass die zur Wange 2—3 gehörige Einflusslinie für V' eine Gerade ist, die bei $x = 0$ und $x = l$ die Ordinaten $-0,36$ und $+0,28$ besitzt. Auf diese Weise gelangt man zu der in Fig. 128 dargestellten Einflusslinien für V'; dieselbe ist durch die Koefficienten der Grössen V in Gleich. VI bestimmt. Ihr Flächeninhalt ist

$$\mathfrak{F} = l\left[1,20 - 0,36 + 0,28 - 0,20 + 0,12 - \frac{0,04}{2}\right] = 1,02\,l$$

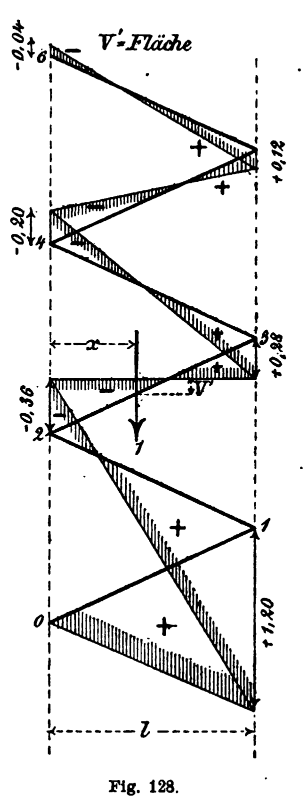


Fig. 128.

Hiervon entfällt auf den positiven Theil der Einflussfläche:

$$\mathfrak{F}_{+} = \frac{l}{2}\left[1,20 + \frac{1,20^2}{1,20 + 0,36} + \frac{0,28^2}{0,36 + 0,28} + \frac{0,28^2}{0,28 + 0,20} + \frac{0,12^2}{0,20 + 0,12} + \frac{0,12^2}{0,12 + 0,04}\right] = 1,27\,l$$

und auf den negativen Theil (absolut genommen)

$$\mathfrak{F}_{-} = 1,27\,l - 1,02\,l = 0,25\,l.$$

Wir zerlegen nun die Belastung der Wange in

die ständige Belastung g für die Einheit der Länge l
und „ bewegliche „ p „ „ „ „ „ l

setzen $p + g = q$ und belasten, um das grösste σ_1 zu erzielen, die positiven Beitragsstrecken mit q, die negativen mit g. Wir erhalten dann

$$_{max}V' = q\mathfrak{F}_{+} - g\mathfrak{F}_{-} = (1,27\,q - 0,25\,g)\,l.$$

Sind g' und q' bezieh. die ständige und bewegliche Belastung für den Podestträger, so wird V'' ein Grösstwerth mit $q_1 = q_3 = q_5 = q'$ und $q_2 = q_4 = q_6 = g'$ und zwar ergiebt sich

$$_{max}V'' = \frac{1}{8}\,b\,(7\,q' - 3\,g')$$

also schliesslich:

$$_{max}\sigma_1 = \frac{e_u b}{4 J_u}\left[(1,27\,q - 0,25\,g)\,l + 7\,q' - 3\,g')\,\frac{b}{8}\right].$$

Wird das Eigenwicht der Treppe für das qm Grundfläche zu 200 k angenommen, die bewegliche Belastung zu 800*), so ist, mit den in der Fig. 123 angegebenen Abmessungen, für die Wange:

$$g = 200 \cdot \frac{1,4}{2} = 140 \frac{k}{m}, \; q = (200 + 800) \frac{1,4}{2} = 700 \frac{k}{m}$$

und für den Podestträger:

$$g' = 200 \frac{1,6}{2} = 160 \frac{k}{m}$$

$$q' = (200 + 800) \frac{1,6}{2} = 800 \frac{k}{m}$$

Man erhält dann

$$(1,27\,q - 0,25\,g)\,l + 7\,q' - 3\,g')\,\frac{b}{8} = 4781 \text{ k}$$

und, wegen $\frac{J_u}{e_u} = W_u = 318$

$$_{max}\sigma_1 = \frac{4781 \cdot 280}{4 \cdot 318} = 1052 \frac{k}{cm^2}.\text{**)}$$

Nach der gewöhnlichen Berechnung hätte man in der Mitte des Podestträgers die Belastung $V_r = ql$ angenommen und die Kräfte $X = 0$ gesetzt. Dann wäre entstanden

$$\sigma_1 = \frac{e_u b}{4 J_u} [ql + 0,5\, q' b]$$

und hieraus hätte sich $\sigma_1 = 790$ k/cm² ergeben, d. i. ein um etwa 49 % zu kleiner Werth.

§ 16.

Berechnung der Verschiebungen von Punkten gerader Stäbe und der Drehungswinkel von Tangenten an die Stabachse.

1) Umformung der Gleichungen (37) und (38) im § 13. Um die Verschiebung δ_m eines in der Kräfteebene gelegenen Stabpunktes m nach einer in die Kräfteebene fallenden Richtung mm' zu berechnen, bringe man im Punkte m eine durch m' gehende Last „Eins" an und

---

*) Die Treppe diene zur Beförderung schwerer Lasten.

**) Ganz ebenso werden die übrigen Podestträger untersucht. Wir fanden für dieselben etwas geringere Beanspruchungen.

bestimme die hierdurch hervorgerufenen Auflagerkräfte $\overline{C}$, Biegungsmomente $\overline{\mathrm{M}}$ und Längskräfte $\overline{N}$. Sodann erhält man für den Fall, dass die Gleich. (40b) und (43) auf Seite 83 giltig sind:

$$(54)\quad \delta_m = \int \frac{N\overline{N}dx}{EF} + \int \frac{\mathrm{M}\overline{\mathrm{M}}dx}{EJ} + \int \varepsilon t_0 \overline{N} dx + \int \varepsilon \Delta t \frac{\overline{\mathrm{M}}}{h} dx - \overline{L},$$

wobei

$\overline{L}$ = virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte $\overline{C}$,
N = Längskraft, M = Biegungsmoment } hervorgerufen durch die wirkliche Belastung,

während t_0 unnd Δt die auf Seite 84 erklärte Bedeutung haben.

Die Gleich. (54) ergiebt sich aus der Gleich. (37) mit Beachtung der Gleich. (46) und (47).

Ist der Stab (oder die Stabverbindung) statisch unbestimmt, so dürfen bei der Berechnung der $\overline{C}$, $\overline{\mathrm{M}}$ und $\overline{N}$ alle statisch nicht bestimmbaren Grössen gleich Null gesetzt werden, wobei es freisteht, in welcher Weise der Stab in einen statisch bestimmten Hauptträger verwandelt wird.

Man darf auch schreiben (nach Gleich. 38):

$$(55)\quad \delta_m = \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial P_m} dx + \int \frac{\mathrm{M}}{EJ} \cdot \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial P_m} dx + \int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial P_m} dx + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \cdot \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial P_m} dx - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c,$$

wobei P_m eine in m angreifende, durch m' gehende Last bedeutet, welcher nöthigenfalls nach Ausführung der Differentiation der Werth Null beizulegen ist.

2) Drehung einer Tangente. Der Winkel τ_m, um welchen sich die im Punkte m an die Stabachse gelegte Tangente bei der Formänderung des Stabes dreht, ist gegeben durch die Gleichung

$$(54a)\quad \tau_m = \int \frac{N\overline{N}dx}{EF} + \int \frac{\mathrm{M}\overline{\mathrm{M}}dx}{EJ} + \int \varepsilon t_0 \overline{N} dx + \int \varepsilon \Delta t \frac{\overline{\mathrm{M}}}{h} dx - \overline{L},$$

wobei N = Längskraft, M = Biegungsmoment } in Folge der wirklichen Belastung,
$\overline{N}$ = Längskraft, $\overline{\mathrm{M}}$ = Biegungsmoment } für irgend einen Querschnitt des Hauptträgers,

falls auf letzteren ein im Punkte m angreifendes Kräftepaar wirkt, dessen Moment $\mathfrak{M}_m = 1$ ist (vergl. Seite 78).

$\overline{L}$ bedeutet die virtuelle Arbeit der gleichzeitig mit $\overline{N}$ und $\overline{\mathrm{M}}$ entstehenden Auflagerkräfte.

Man darf auch schreiben, entsprechend Gleich. 38a und mit Hinweis auf Gleich. 55,

$$(55a) \quad \tau_m = \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial \mathfrak{M}_m} dx + \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial \mathfrak{M}_m} dx + \int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial \mathfrak{M}_m} dx + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \frac{\partial M}{\partial \mathfrak{M}_m} dx,$$

wobei das Moment $\mathfrak{M}_m$ nach Ausführung der Differentiation gleich Null zu setzen ist, wenn das im Punkte m angenommene Kräftepaar in Wirklichkeit nicht vorhanden ist.

3) Handelt es sich um einen Körper, der aus einem Fachwerke und aus einem oder mehreren auf Biegungsfestigkeit beanspruchten, geraden Stäben besteht, so tritt auf der rechten Seite der Gleich. (54) und (54 a) noch der Werth hinzu:

$$\Sigma \frac{S\bar{S}s}{EF} + \Sigma \varepsilon t \bar{S} s$$

auf der rechten Seite der Gleich. (55) der Werth

$$\Sigma \frac{Ss}{EF} \cdot \frac{\partial S}{\partial P_m} + \Sigma \varepsilon t \frac{\partial S}{\partial P_m} s$$

und auf der rechten Seite der Gleich. (55 a) der Werth

$$\Sigma \frac{Ss}{EF} \cdot \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{M}_m} + \Sigma \varepsilon t \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{M}_m} s.$$

$\bar{S}$ bedeutet die gleichzeitig mit $\bar{N}$ und $\bar{M}$ entstehende Spannkraft eines Fachwerkstabes.

Bei Anwendung der Gleichungen (55) und (55 a) dürfen die statisch nicht bestimmbaren Grössen X als Konstanten aufgefasst werden; es genügt, die Integrale und Summen über den statisch bestimmten Hauptträger auszudehnen.

Aufgabe 1. Der in Fig. 129 dargestellte, ursprünglich wagerechte Stab mit einem eingespannten und einem freien Ende sei gleichmässig und ausserdem im Punkte A mit P belastet. Gesucht die senkrechte Verschiebung δ des Punktes A. E und J seien konstant; Verschiebungen der Stützpunkte seien ausgeschlossen, hingegen soll eine ungleichmässige Erwärmung (nach Fig. 75) berücksichtigt werden.

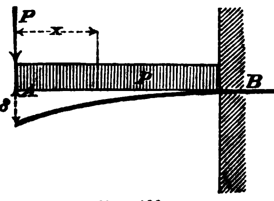


Fig. 129.

Es ergiebt sich

$$\delta = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx + \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \int_0^l \frac{\partial M}{\partial P} dx, ^{*})$$

*) $\Delta t = t_1 - t_2$, wobei t_1 = Temperaturänderung für den untersten, t_2 desgl. für den obersten Punkt des Querschnittes.

$$\mathrm{M} = -Px - \frac{px^2}{2}, \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial P} = -x,$$

$$\delta = \frac{1}{EJ}\int\limits_0^l \left(Px^2 + \frac{px^3}{2}\right) dx - \varepsilon \frac{\Delta t}{h}\int\limits_0^l x\,dx,$$

$$\delta = \frac{l^3}{EJ}\left(\frac{P}{3} + \frac{pl}{8}\right) - \varepsilon \Delta t \frac{l^2}{2h}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung findet man für einen ungleichmässig erwärmten und gleichmässig belasteten, bei A frei aufliegenden, bei B wagerecht eingespannten Balken (Fig. 130), dessen linke, ursprünglich in der Wagerechten durch B gelegene Stütze sich um δ gesenkt hat, die Beziehung:

$$\delta = \frac{l^3}{EJ}\left(-\frac{A}{3} + \frac{pl}{8}\right) - \varepsilon \Delta t \frac{l^2}{2h}$$

Fig. 130.

und hieraus die Auflagerkraft

$$A = \frac{3pl}{8} - \frac{3EJ}{l^3}\left[\delta + \varepsilon \Delta t \frac{l^2}{2h}\right].$$

Aufgabe 2. Es soll die Senkung δ des Punktes A des in Fig. 131 dargestellten, mit P belasteten, festen Krahnes berechnet werden.

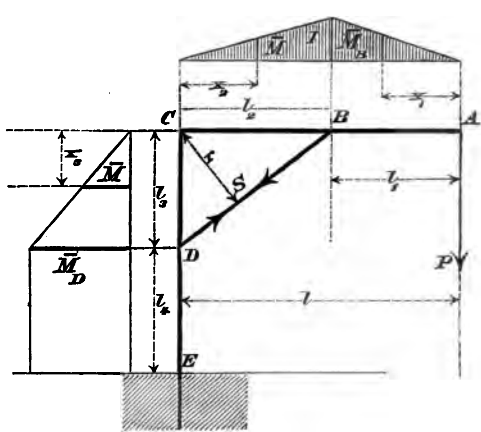


Fig. 131.

Verschiebungen der Stützpunkte und Temperaturänderungen seien ausgeschlossen. Es seien

F und J = Inhalt und Trägheitsmoment des Querschnittes von Stab AC,

F_1 und J_1 = Inhalt und Trägheitsmoment des Querschnittes von Stab CE,

F_2 = Inhalt des Querschnittes, s = Länge von Stab BD,

E, E_1, E_2 bedeuten die entsprechenden Elasticitätsziffern.

Wir wenden Gl. 54 an und setzen $\overline{L} = 0$, $t_0 = 0$, $\Delta t = 0$.

$\overline{\mathrm{M}}$ und $\overline{N}$ entsprechen der Last $P = 1$, und es folgt $N = P\overline{N}$, $\mathrm{M} = P\overline{\mathrm{M}}$ mithin:

$$\text{(I)} \quad \delta = P\left[\int \frac{\overline{N}^2 dx}{EF} + \int \frac{\overline{\mathrm{M}}^2 dx}{EJ}\right].$$

In Fig. 131 sind die der Last $P = 1$ entsprechenden Momentenflächen für die Stäbe AC und CE dargestellt; sie sind bestimmt durch

$\overline{\mathrm{M}}_B = 1 \cdot l_1 =$ Moment für Querschnitt B und

$\overline{\mathrm{M}}_D = 1 \cdot l =$ „ „ die Querschnitte zwischen D und E.

Die Spannkraft $\overline{S}$ im Stabe BD ist

$\overline{S} = -1 \cdot \dfrac{l}{r}$ (folgt aus der Bedingung $Sr + Pl = 0$),

wobei r das Loth von C auf BD.

Es folgt nun, wenn $\angle\, CBD = \alpha$ ist,

$$\text{für Theil } l_1 \colon \overline{\mathrm{M}} = 1 \cdot x_1, \int \frac{\overline{\mathrm{M}}^2 dx}{EJ} = \frac{l_1^3}{3EJ}, \ \overline{N} = 0;$$

$$\text{für Theil } l_2 \colon \overline{\mathrm{M}} = 1 \cdot \frac{x_2}{l_2}\, l_1, \int \frac{\overline{\mathrm{M}}^2 dx}{EJ} = \frac{l_1 l_2^2}{3EJ},$$

$$\overline{N} = -\overline{S} \cos\alpha = + \frac{l}{r} \cos\alpha, \int \frac{\overline{N}^2 dx}{EF} = \frac{l^2}{r^2} \cos^2\alpha \frac{l_2}{EF};$$

$$\text{für Theil } l_3 \colon \overline{\mathrm{M}} = 1 \cdot \frac{x_3}{l_3} \cdot l, \int \frac{\overline{\mathrm{M}}^2 dx}{EJ} = \frac{l l_3^2}{3E_1J_1},$$

$$\overline{N} = -\overline{S} \sin\alpha = + \frac{l}{r} \sin\alpha, \int \frac{\overline{N}^2 dx}{EF} = \frac{l^2}{r^2} \sin^2\alpha \frac{l_3}{E_1F_1};$$

$$\text{für Theil } l_4 \colon \overline{\mathrm{M}} = 1 \cdot l, \int \frac{\overline{\mathrm{M}}^2 dx}{EJ} = \frac{l^2 l_4}{E_1J_1},$$

$$\overline{N} = -1, \int \frac{\overline{N}^2 dx}{EF} = \frac{l_4}{E_1F_1};$$

$$\text{für Theil } \overline{DB} = s \colon \overline{\mathrm{M}} = 0, \ \overline{N} = -\overline{S} = -\frac{l}{r},$$

$$\int \frac{\overline{N}^2 dx}{EF} = \frac{l^2}{r^2} \cdot \frac{s}{E_2F_2}.$$

Addirt man die berechneten Integrale, so erhält man nach Gl. I:

$$\delta = P\left[\frac{l^2}{r^2}\left(\frac{l_2}{EF}\cos^2\alpha + \frac{l_3}{E_1F_1}\sin^2\alpha + \frac{s}{E_2F_2}\right) + \frac{l_4}{E_1F_1} + \frac{l_1}{3EJ}(l_1^2 + l_2^2) + \frac{l}{E_1J_1}\left(\frac{l_3^2}{3} + l l_4\right)\right].$$

Aufgabe 3. Um welche Strecke δ senkt sich der Mittelpunkt S des Balkens AB des in Aufgabe 3 (§ 15) behandelten Krahngerüstes?

Bezüglich aller Bezeichnungen wird auf § 15 verwiesen; die dort gezeigte Berechnung der statisch nicht bestimmbaren Auflagerkraft X muss der Ermittelung von δ vorausgehen. Hierauf wird die Stabverbindung

statisch bestimmt gemacht, beispielsweise durch das bei D (Fig. 132) angeordnete wagerechte Gleitlager, und der so erhaltene Hauptträger im Punkte S mit der senkrechten Kraft „Eins" belastet. Es entstehen bei D und C senkrechte Gegendrücke ($=\frac{1}{2}$), welche im Verein mit der Last „Eins" Momente $\overline{M}$ und Längskräfte $\overline{N}$ erzeugen, und es ergiebt sich aus diesen — wenn Verschiebungen des Stützpunkte und Temperaturänderungen unberücksichtigt bleiben sollen —

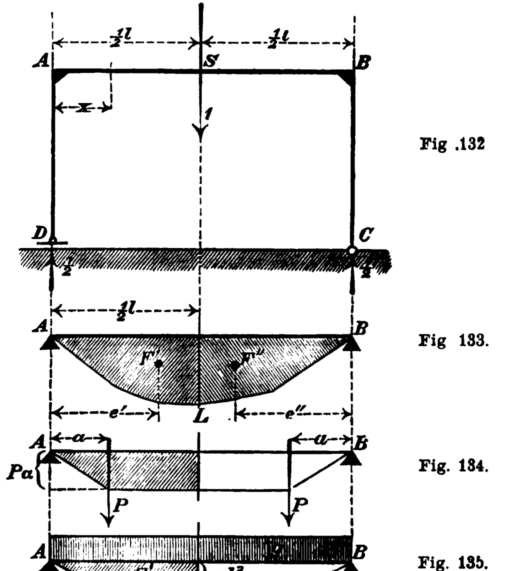


Fig. 132

Fig. 133.

Fig. 134.

Fig. 135.

$$\text{(I)}\quad \delta = \int \frac{M\overline{M}dx}{EJ} + \int \frac{N\overline{N}dx}{EF},$$

wobei M = Biegungsmoment und N = Längskraft für die wirkliche, in Fig. 100 dargestellte Belastung.

Für die linke Hälfte des Stabes AB ist $\overline{N}=0$, $\overline{M}=\frac{1}{2}x$, $M = M_0 - Xh$ und

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M\overline{M}dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\int_0^{\frac{l}{2}} (M_0 - Xh)\frac{x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2EJ}\left(\int_0^{\frac{l}{2}} M_0 x\,dx - \frac{Xhl^2}{8}\right).$$

M_0 bedeutet die Ordinate der früher erklärten einfachen Momentenfläche ALB (Eig. 101 und Fig. 133), welche durch die Mittel-Senkrechte in 2 Theile zerlegt wird, deren Inhalte $= F'$ und $= F''$, und deren Schwerpunkts-Abstände von den benachbarten Auflagersenkrechten $= e'$ und $= e''$ sind. Da nun $F'e' = \int_0^{\frac{1}{2}l} M_0 x\,dx$ ist, so ergiebt sich für die linke Hälfte des Stabes AB:

$$\int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{M\overline{M}dx}{EJ} = \frac{1}{2EJ}\left(F'e' - \frac{Xhl^2}{8}\right)$$

und für den ganzen Stab:

$$\int \frac{M\overline{M}dx}{EJ} = \frac{1}{2EJ}\left(F'e' + F''e'' - \frac{Xhl^2}{4}\right).$$

Für den Stab AD ist: $\overline{N} = -\frac{1}{2}$, $\overline{M} = 0$, $N = -\frac{Rb'}{l}$ (vergl. Seite 107 und Fig. 100) und

$$\int \frac{N\overline{N}dx}{EF} = \frac{Rb'}{2l}\frac{h}{E_1F_1}$$

und dem Stabe BC entspricht: $\overline{N} = -\frac{1}{2}$, $\overline{M} = 0$, $N = -\frac{Ra'}{l}$,

$$\int \frac{N\overline{N}dx}{EF} = \frac{Ra'}{2l}\frac{h}{E_1F_1}.$$

Für beide Stäbe erhält man zusammen:

$$\int \frac{N\overline{N}dx}{EF} = \frac{R}{2l}\frac{h}{E_1F_1}(a' + b') = \frac{Rh}{2E_1F_1},$$

wobei R = Summe aller auf den Balken AB wirkenden Lasten.

Nach Gleich. I ist nun

$$\delta = \frac{Rh}{2E_1F_1} + \frac{1}{2EJ}\left(F'e' + F''e'' - \frac{Xhl^2}{4}\right). \text{ —}$$

Die einfache Momentenfläche für zwei in Bezug auf die Mittel-Senkrechte gleich gelegene Lasten P ist ein Trapez mit der Höhe Pa (Fig. 134), und für dieses ist

$$F'e' = Pa\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4} - Pa\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3} = \frac{Pa(3l^2 - 4a^2)}{24} = F''e''.$$

Da nun diesen beiden Lasten die Werthe entsprechen:

$$R = 2P \text{ und}$$

$$X = \frac{Pab}{hl\left(1 + \frac{2}{3}\frac{J}{J_1}\frac{E}{E_1}\frac{h}{l} + \frac{J}{Fh^2}\right)} \text{ (nach Gl. IV u. V auf Seite 109),}$$

so folgt die durch beide Lasten erzeugte Verschiebung δ:

$$\delta = \frac{Ph}{E_1F_1} + \frac{1}{2EJ}\left(\frac{Pa(3l^2 - 4a^2)}{12} - \frac{Pabl}{4\mu}\right),$$

wobei

$$\mu = 1 + \frac{2}{3}\frac{J}{J_1}\frac{E}{E_1}\frac{h}{l} + \frac{J}{Fh^2}$$

ist.

Zu dieser Senkung liefern beide Lasten den gleichen Beitrag, so dass eine Last P nur eine halb so grosse Senkung hervorbringt, nämlich:

$$\text{(II)} \quad \delta = \frac{Ph}{2E_1F_1} + \frac{Pa}{16EJ}\left(l^2 - \frac{4}{3}a^2 - \frac{l(l-a)}{\mu}\right).$$

Die einfache Momentenfläche für eine gleichmässige Last ($= g$ für die Längeneinheit) ist eine Parabelfläche (Fig. 135) mit dem Pfeile $\frac{gl^2}{8}$; für diese ist

$$F' = F'' = \frac{2}{3}\cdot\frac{gl^2}{8}\cdot\frac{l}{2} = \frac{gl^3}{24},$$

$$e' = e'' = \frac{5}{8}\cdot\frac{l}{2} = \frac{5l}{16},$$

$$F'e' + F''e'' = 2 \cdot \frac{gl^3}{24} \cdot \frac{5l}{16} = \frac{5gl^4}{192}$$

und weiter erzeugt diese gleichmässige Last:

$$R = gl, \quad X = \frac{gl^3}{12hl\mu} \quad \text{(nach Gl. VI, Seite 109),}$$

und die Durchbiegung

$$\text{(III)} \quad \delta = \frac{glh}{2E_1F_1} + \frac{1}{2EJ}\left[\frac{5gl^4}{192} - \frac{gl^4}{48\mu}\right]$$
$$= \frac{glh}{2E_1F_1} + \frac{gl^4}{384EJ}\left(5 - \frac{4}{\mu}\right).$$

Aufgabe 4 (Fig. 136). Ein ursprünglich wagerechter, bei B fest eingespannter, bei A freier Stab ist gleichmässig mit p für die Längeneinheit belastet und wird ausserdem im Punkte A durch eine Einzellast P und ein Kräftepaar, dessen Moment $= M_1$ ist, beansprucht. Gesucht ist der Neigungswinkel τ der in A an die elastische Linie gelegten Tangente. Temperaturänderungen und Nachgeben des Widerlagers seien ausgeschlossen. Da $N = 0$ ist, so folgt aus Gleich. 55a:

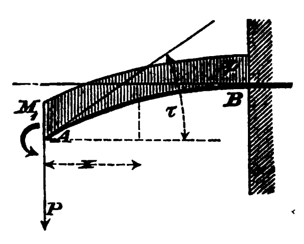


Fig. 136.

$$\tau = \int_0^l \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_1} dx,$$

worein zu setzen:

$$M = -Px - \frac{px^2}{2} - M_1,$$
$$\frac{\partial M}{\partial M_1} = -1.$$

Es ergiebt sich, bei konstantem EJ,

$$\tau = \frac{1}{EJ}\int_0^l \left(Px + \frac{px^2}{2} + M_1\right) dx = \frac{1}{EJ}\left(\frac{Pl^2}{2} + \frac{pl^3}{6} + M_1 l\right).$$

§ 17.

Aufgaben über krumme Stäbe mit im Verhältnis zu der Querschnittshöhe grossen Krümmungshalbmessern.

Ist ein einfach gekrümmter Stab symmetrisch in Bezug auf die die Stabachse enthaltende Kräfteebene, so dürfen, bei im Verhältnis zur

Querschnittshöhe grossen Krümmungshalbmessern, die senkrecht zur Querschnittsebene wirkenden Spannungen mit Hilfe der für den geraden Stab entwickelten Gleichung

$$\sigma = \frac{Mv}{J} + \frac{N}{F}$$

berechnet werden, und ebenso ist es zulässig, bei Bestimmung von statisch nicht bestimmbaren Grössen und von Verschiebungen δ und Drehungen τ die Gleich. 49 bis 53 und 54 bis 55a anzuwenden. Für alle im Brückenbau und im Hochbau vorkommenden Bogenträger ist diese Vereinfachung der im § 22 abgeleiteten genaueren Theorie statthaft.

Wird das Element der Schwerpunkts-Achse des gekrümmten Stabes mit ds bezeichnet, so ist in den genannten Gleichungen dx durch ds zu ersetzen.

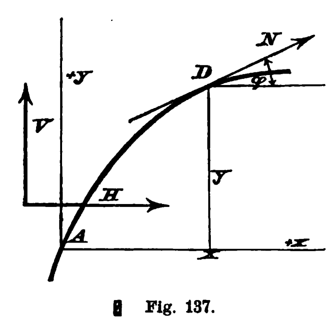


Fig. 137.

In den nachstehenden Aufgaben werden die zu untersuchenden Bögen auf rechtwinklige Koordinaten (x, y) mit wagerechter x-Achse bezogen. Der Neigungswinkel der in irgend einem Punkte D der Bogenachse an diese gelegten Tangente gegen die Wagerechte wird mit φ bezeichnet. Bedeutet dann für das Bogenstück AD links von D (Fig. 137):

V die Mittelkraft aus sämmtlichen senkrechten äusseren Kräften,
H „ „ „ „ wagerechten „ „

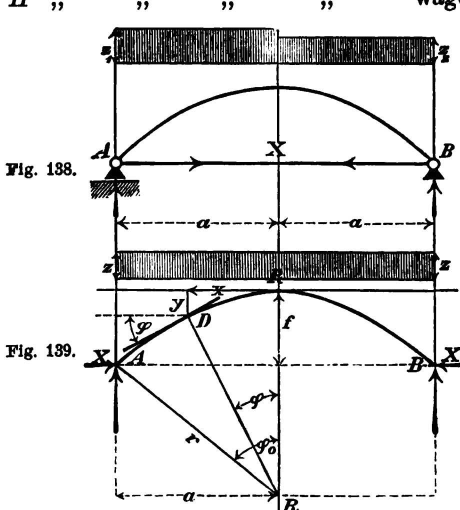


Fig. 138.

Fig. 139.

und wird V nach oben und H nach rechts positiv gezählt, so muss die den Querschnitt bei D beanspruchende Längskraft N der Gleichung genügen

$$N + V\sin\varphi + H\cos\varphi = 0,$$

die man erhält, indem man die Summe sämmtlicher auf das Stück AD parallel zu N wirkenden Kräfte gleich Null setzt, und aus der sich

$$(56)\quad N = -V\sin\varphi - H\cos\varphi$$

ergiebt.

Aufgabe 1. Ein kreisförmiger Bogenträger mit Kämpfergelenken, aber ohne Scheitelgelenk, ist in Bezug auf die Mittel-

senkrechte symmetrisch und trägt auf der linken und rechten Hälfte gleichmässig über die Sehne AB vertheilte Lasten z_1 und z_2 für die Längeneinheit. Die Kämpfer sind durch eine Stange verbunden. Bei B ist ein festes, bei A ein wagerechtes (reibungsloses) Gleitlager angeordnet, Fig. 138. Gesucht ist die Spannkraft X in der Stange AB.

Wir nehmen zunächst an, es sei $z_1 = z_2 = z$ und finden mit den aus der Fig. 139 ersichtlichen Bezeichnungen für einen Querschnitt D, im Abstande x vom Scheitel, das Biegungsmoment

$$\mathrm{M} = za\,(a - x) - z\,(a - x)\,\frac{a - x}{2} - X\,(f - y)$$

$$= z\,\frac{(a^2 - x^2)}{2} - X\,(f - y) \text{ d. i.}$$

$$\text{(I)} \quad \mathrm{M} = z\,\frac{r^2}{2}\,(\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi) - Xr\,(\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Die Mittelkraft der auf das Stabstück AD wirkenden senkrechten äusseren Kräfte ist

$$V = za - z\,(a - x) = zx = zr \sin \varphi,$$

und es ergiebt sich daher die Längskraft N für den Querschnitt D mittelst Gleich. 56:

$$\text{(II)} \quad N = -zr \sin^2 \varphi - X \cos \varphi.$$

Fassen wir jetzt X als Auflagerkraft auf und bezeichnen mit Δa die Verlängerung der Sehnen-Hälfte a, so ist die virtuelle Arbeit der auf die linke Stabhälfte wirkenden Auflagerkräfte, bei festliegend angenommenen Linien RR und AB:

$$L' = -X \Delta a,$$

und es ergeben sich für den Zustand $X = 1$ die Werthe

$$\mathrm{M}' = -r\,(\cos \varphi - \cos \varphi_0), \quad N' = -\cos \varphi, \quad L' = -\Delta a.$$

Die für den Fall einer gleichmässigen Erwärmung des Bogens um t Grad giltige Gleichung

$$L' = \int \frac{N' N ds}{EF} + \int \frac{\mathrm{M}' \mathrm{M} ds}{EJ} + \varepsilon t \int N' ds,$$

welcher die Unbekannte X zu genügen hat, geht, wenn E, F und J für alle Bogenquerschnitte gleich gross angenommen werden, über in

$$\text{(III)} \quad \Delta a = \frac{1}{EF} \int_0^{\varphi_0} \cos \varphi\,(-zr \sin^2 \varphi - X \cos \varphi)\, r\, d\varphi$$

$$+ \frac{1}{EJ} \int_0^{\varphi_0} r(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \left[\frac{zr^2}{2} (\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi) - Xr (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \right] r\, d\varphi$$

$$+ \varepsilon t \int_0^{\varphi_0} \cos \varphi\, ds;$$

die in derselben vorkommenden Integrale erstrecken sich nur über die linke Hälfte des Trägers. Die Verlängerung Δa der Hälfte der Stange AB, deren Querschnitt $= F_0$ und deren Elasticitätsmodul $= E$ sein möge, ist

$$\Delta a = \frac{Xa}{EF_0},$$

wobei angenommen wird, dass sich nur der Bogen um t erwärmt, während die Anfangs-Temperatur der Stange ungeändert bleibt.*) Es geht Gl. III über in

$$\frac{Xa}{EF_0} = -\frac{zr^2}{EF}\int_0^{\varphi_0} \sin^2\varphi \cos\varphi\, d\varphi - \frac{Xr}{EF}\int_0^{\varphi_0} \cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$+ \frac{zr^4}{2EJ}\int_0^{\varphi_0} (\sin^2\varphi_0 - \sin^2\varphi)(\cos\varphi - \cos\varphi_0)\, d\varphi$$

$$- \frac{Xr^3}{EJ}\int_0^{\varphi_0} (\cos\varphi - \cos\varphi_0)^2\, d\varphi + \varepsilon t a.$$

Nun ist:

$$\int_0^{\varphi_0} \sin^2\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3}\sin^3\varphi_0,$$

$$\int_0^{\varphi_0} (\sin^2\varphi_0 - \sin^2\varphi)(\cos\varphi - \cos\varphi_0)\, d\varphi = \frac{2}{3}\sin^3\varphi_0$$

$$+ \frac{1}{2}\varphi_0 \cos\varphi_0 \cos 2\varphi_0 - \frac{1}{2}\sin\varphi_0 \cos^2\varphi_0,$$

$$\int_0^{\varphi_0} (\cos\varphi - \cos\varphi_0)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\varphi_0 - \frac{3}{2}\cos\varphi_0 \sin\varphi_0 + \varphi_0\cos^2\varphi_0,$$

und es ergiebt sich somit, wegen $a = r\sin\varphi_0$:

$$X = \frac{\mu' z r + 2\varepsilon E \dfrac{J}{r^2} t \sin\varphi_0}{\mu''},$$

wobei

$$\mu' = \tfrac{2}{3}\sin^3\varphi_0 + \tfrac{1}{2}\varphi_0\cos\varphi_0\cos 2\varphi_0 - \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi_0\sin\varphi_0 - \tfrac{2}{3}\frac{J}{Fr^2}\sin^3\varphi_0 \text{ und}$$

$$\mu'' = \varphi_0 - 3\cos\varphi_0\sin\varphi_0 + 2\varphi_0\cos^2\varphi_0 + \frac{J}{Fr^2}(\varphi_0 + \sin\varphi_0\cos\varphi_0) + 2\frac{J}{Fr^2}\sin\varphi_0.$$ **)

---

*) Bei gleichmässiger Erwärmung von Stange und Bogen ist der unbelastete Träger spannungslos. Es ist zu empfehlen, einen Unterschied der Temperaturen von Bogen und Stange von $t = \pm 10^0$ bis $\pm 15^0$ Cels. in Rechnung zu stellen.

**) Die von $\frac{J}{r^2}$ abhängigen Glieder der Ausdrücke μ' und μ'' dürfen in der Regel vernachlässigt werden.

Der Einfluss einer Temperaturänderung ist für sich allein

$$X = 2\varepsilon E \frac{J}{\mu'' r^2} t \sin \varphi_0$$

und der Einfluss der Belastung:

$$X = \frac{\mu'}{\mu''} zr.$$

Zu letzterem Werthe liefern die auf beiden Bogenhälften ruhenden Lasten za den gleichen Beitrag: $\frac{1}{2}\frac{\mu'}{\mu''} zr$; wirkt auf die eine Hälfte (wie in Fig. 138) die Last $z_1 a$ und auf die andere die Last $z_2 a$, so entsteht demnach

$$X = \frac{1}{2}\frac{\mu'}{\mu''} r (z_1 + z_2).$$

Handelt es sich um die Berechnung eines Dachbinders, dessen Eigengewicht $= g$, und dessen gesammte Belastung $= q$ für die Längeneinheit der Sehne AB ist, so genügt es, die Werthe X, M und N sowie die Spannungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= + \frac{M e_1}{J} + \frac{N}{F} \\ \sigma_2 &= - \frac{M e_2}{J} + \frac{N}{F} \end{aligned}\right\} \text{vergl. Gleich. 41 und Fig. 75}$$

für zwei Belastungsfälle zu berechnen.

Man setze einmal

$$z_1 = g \text{ und } z_2 = q$$

und hierauf

$$z_1 = z_2 = q.$$

(Bei beträchtlicher Pfeilhöhe ist noch der Einfluss schräger Winddrücke mit Hilfe einer besonderen Untersuchung, die ähnlich durchzuführen ist, wie die vorstehende, festzustellen.)

Aufgabe 2. Ein in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte symmetrischer Parabelbogen ist an den Enden fest eingespannt und im Scheitel mit einem Gelenke versehen; es sollen die durch eine senkrechte Einzellast P und durch Temperaturänderung hervorgerufenen Stützendrücke K_1 und K_2 ermittelt werden, Fig. 140.

Die 3 Kräfte K_1, K_2 und P müssen sich in einem Punkte C schneiden. Liegt P links vom Scheitelgelenk S, so geht der Auflagerdruck K_2 durch S; er möge im Punkte S in die senkrechte Seitenkraft B und in die wagerechte Seitenkraft H (Horizontalschub) zerlegt werden. Sind B und H gefunden, so ist das aus P, K_1 und K_2 bestehende Kräftedreieck bestimmt und die gestellte Aufgabe gelöst.

B und H sind statisch nicht bestimmbare Grössen; sie sollen unter der Voraussetzung berechnet werden, dass die Stützen starr sind und

der Bogen gleichmässig erwärmt wird; dann gilt die Gleichung

$$\text{(I)} \quad 0 = \int \frac{M ds}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} + \int \frac{N ds}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} + \varepsilon t \int ds \frac{\partial N}{\partial X},$$

in welche erst $X = B$ dann $X = H$ zu setzen ist.

Ist der Scheitel der Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so ergiebt sich für den bei x gelegenen Bogenquerschnitt das Biegungsmoment:

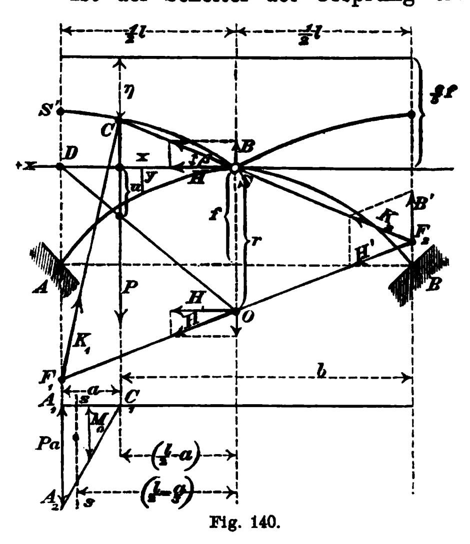


Fig. 140.

$$M = Hy + Bx - M_0,$$

wobei $(-M_0)$ das Biegungsmoment für den Fall: $H = 0$ und $B = 0$ bedeutet. Für alle Querschnitte rechts von P ist $M_0 = 0$, und für die links von P gelegenen Querschnitte ist M_0 gleich der Ordinate einer Geraden $\overline{C_1 A_2}$, deren Endordinate $A_1 A_2 = Pa$ ist, während die Spitze C_1 senkrecht unter der Last P liegt.

Die Längskraft N ist für einen Querschnitt rechts von C (wenn φ den Neigungswinkel der in x, y an die Bogenachse gelegten Tangente gegen die x-Achse bezeichnet)

$$N = B \sin \varphi - H \cos \varphi$$

und für einen Querschnitt links von C

$$N = (B - P) \sin \varphi - H \cos \varphi;$$

beidemale ist $\frac{\partial N}{\partial B} = \sin \varphi$ und $\frac{\partial N}{\partial H} = -\cos \varphi$. Da nun weiter $\frac{\partial M}{\partial B} = x$ und $\frac{\partial M}{\partial H} = y$ ist, so folgen aus Gleich. I mit $X = B$ und $X = H$ die beiden Bedingungen:

$$0 = \int \frac{M x ds}{EJ} + \int \frac{N dy}{EF} + \varepsilon t \int dy$$

$$0 = \int \frac{M y ds}{EJ} - \int \frac{N dx}{EF} - \varepsilon t \int dx;$$

sie sollen mit Vernachlässigung der von N abhängigen, das Endergebniss nur wenig beeinflussenden Integrale aufgelöst werden; ausserdem soll $\frac{ds}{J} = \frac{dx}{J \cos \varphi}$ gesetzt und $J \cos \varphi = Konst. = J'$ angenommen werden.

Es gehen dann, wegen $\int dy = 0$ und $\int dx = l$, obige Gleichungen über in:

$$0 = \int (Hy + Bx - \mathrm{M}_0)\, x\, dx$$

$$0 = \int (Hy + Bx - \mathrm{M}_0)\, y\, dx - \varepsilon E J' t l.$$

Da die y-Achse eine Symmetrieachse ist, so folgt $\int yx\, dx = 0$ und $\int x\, dx = 0$, und es ergiebt sich aus der ersten Gleichung

$$\text{(II)} \quad B = \frac{\int \mathrm{M}_0 x\, dx}{\int x^2 dx}$$

und aus der zweiten

$$\text{(III)} \quad H = \frac{\int \mathrm{M}_0 y\, dx + \varepsilon E J' t l}{\int y^2 dx}.$$

$\int \mathrm{M}_0 x\, dx$ bedeutet das statische Moment des Dreiecks $C_1 A_1 A_2$ in Bezug auf die y-Achse; es ist also

$$\int \mathrm{M}_0 x\, dx = Pa \frac{a}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{3}\right) = \frac{Pa^2 (3l - 2a)}{12}$$

und

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} x^2 dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}l} x^2 dx = \frac{l^3}{12}, \text{ mithin folgt}$$

$$\text{(IV)} \quad B = \frac{Pa^2 (3l - 2a)}{l^3}.$$

Diese Gleichung gilt bei **beliebiger Form** des symmetrischen Bogens; sie liefert den senkrechten Widerstand des rechtsseitigen Auflagers. Zerlegt man K_1 in A (senkrecht) und H (wagerecht), so folgt

$$\text{(V)} \quad A = P - B = \frac{Pb^2 (3l - 2b)}{l^3}.\text{*)}$$

Aus Gleich. III ergiebt sich der durch die Belastung erzeugte Horizontalschub

$$H = \frac{\int \mathrm{M}_0 y\, dx}{\int y^2 dx}.$$

---

*) Die für die senkrechten Auflagerdrücke A und B abgeleiteten Ausdrücke stimmen mit denen eines wagerechten, an beiden Enden eingespannten, durch eine senkrechte Last P beanspruchten Balkens überein und bleiben auch bei fehlendem Scheitelgelenke S giltig, wie der Verfasser in der Abhandlung:

Für den Parabelbogen ist $y = 4\frac{fx^2}{l^2}$, wobei f = Pfeilhöhe, und es folgt

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} y^2 dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}l}\left(\frac{4fx^2}{l^2}\right)^3 dx = \frac{f^2 l}{5},$$

$$\int \mathrm{M}_0 y\,dx = \frac{4f}{l^2}\int \mathrm{M}_0 x^2 dx.$$

$\int \mathrm{M}_0 x^2 dx$ bedeutet das Trägheitsmoment des Dreiecks $C_1 A_1 A_2$ in Bezug auf die y-Achse. Der Inhalt dieses Dreiecks ist $\mathfrak{F} = \frac{Pa^2}{2}$, der Abstand seiner senkrechten Schwerlinie ss von der y-Achse: $\mathfrak{e} = \frac{l}{2} - \frac{a}{3}$ und sein Trägheitsmoment in Bezug auf ss: $\mathfrak{J} = Pa\frac{a^3}{36}$; es folgt mithin

$$\int \mathrm{M}_0 x^2 dx = \mathfrak{J} + \mathfrak{F}\mathfrak{e}^2 = \frac{Pa^4}{36} + \frac{Pa^2}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{3}\right)^2$$
$$= \frac{Pa^2(3l^2 - 4al + 2a^2}{24}$$

und man gelangt zu der Gleichung

$$\text{(VI)} \quad H = \frac{5Pa^2}{6fl^3}(3l^2 - 4al + 2a^2),$$

welche nur anwendbar ist, sobald P links vom Scheitelgelenk liegt. Befindet sich P rechts von S, so ist

$$H = \frac{5Pb^2}{6fl^3}(3l^2 - 4bl + 2b^2).$$

Bewegt sich P von S aus nach dem linken Auflager hin, so beschreibt der Schnittpunkt C der 3 Kräfte P, K_1, K_2 eine Linie SS', welche die Kämpferdrucklinie genannt wird; ihre Ordinate η, bezogen auf eine in der Entfernung $\frac{6}{5}f$ vom Scheitel gelegene wagerechte Gerade, ergiebt sich aus der Gleichung

$$\frac{6}{5}f - \eta = \left(\frac{l}{2} - a\right)\operatorname{tg}\beta, \text{ wobei } \operatorname{tg}\beta = \frac{B}{H} \text{ ist.}$$

Man findet

$$\text{(VII)} \quad \eta = \frac{3}{5}f\frac{1}{1 - \frac{2a(2l-a)}{3l^2}}$$

„Elasticitätstheorie der Tonnengewölbe“, Zeitschrift für Bauwesen 1881, nachgewiesen hat. Besonders wichtig ist, dass die Form des (symmetrischen) Bogens gleichgiltig ist.

und kann nun Gleich. VI umformen in

$$\text{(VIII)}\quad H = \frac{3Pa^2}{2l\eta}.$$

Zur Berechnung der η-Linie diene die folgende Tabelle:

a	η	a	η
0	0,600	0,6	0,909
0,1	0,642	0,7	0,976
0,2	0,687	0,8	1,047
0,3	0,736	0,9	1,121
0,4	0,789	1,0	1,200
0,5	0,847		
$\cdot\frac{l}{2}$	$\cdot f$	$\cdot\frac{l}{2}$	$\cdot f$

Um mit Hilfe der Kämpferdrucklinie die Lagen der einer gegebenen Einzellast P entsprechenden Kämpferdrücke K_1 und K_2 schnell feststellen zu können, beachte man Folgendes:

Verbindet man die Punkte F_1 und F_2, in denen die Auflagersenkrechten von den Kämpferdrücken geschnitten werden, durch die „Schlusslinie" F_1F_2, zerlegt K_2 nach senkrechter Richtung und nach der Richtung der Schlusslinie in B' und H', so findet man, indem man die Summe der Momente aller Kräfte, in Bezug auf F_1, gleich Null setzt:

$$B'l - Pa = 0 \text{ und hieraus } B' = \frac{Pa}{l}.$$

Verlegt man die Kraft H' von F_2 nach dem Punkte O, in welchem die Schlusslinie von der Senkrechten durch S geschnitten wird, und zerlegt sie dort in H und in eine senkrechte Seitenkraft, so erhält man das Biegungsmoment in Bezug auf S:

$$\text{M} = B'\frac{l}{2} - Hr = 0 \text{ und hieraus}$$

$$r = \frac{B'l}{2H} = \frac{Pa}{2H} = \eta\,\frac{l}{3a}.$$

Die Gerade OD schneidet nun auf der Last-Senkrechten die Ordinate

$$u = r\,\frac{a}{\frac{1}{2}l} = \tfrac{2}{3}\eta$$

ab, und es ergiebt sich somit folgende einfache Konstruktion der Lagen von K_1 und K_2.

Man bringt P mit der Kämpferdrucklinie in C zum Schnitt, zieht die Gerade CSF_2, setzt die Strecke u ab, zieht die Gerade DO und von F_2 durch O die Gerade F_2F_1; man erhält in F_1C und F_2C die Richtungen von K_1 und K_2. Indem man diese Konstruktion für verschie-

dene Lagen der Last P wiederholt, kann man die von den Kämpferdrücken K_1 umhüllte Linie (Kämpferdruck-Umhüllungslinie) zeichnen, deren hohe Bedeutung für die Theorie der gefährlichsten Belastung bekannt ist.

In gleicher Weise wird verfahren, wenn sich P von S aus nach F_2 hin bewegt.

Der durch eine Temperaturerhöhung um t hervorgerufene, durch das Scheitelgelenk S gehende Horizontalschub H_t ist nach Gleich. (III):

$$H_t = \frac{\varepsilon E J' t l}{\int y^2 dx},$$

woraus, mit $\int y^2 dx = \frac{1}{5} f^2 l$, erhalten wird:

$$H_t = \frac{5 \varepsilon E J' t}{f^2}.$$

Aufgabe 3. Es wird der Einfluss von Verschiebungen der Widerlager auf die Stützenwiderstände B und H des in Aufgabe 2 behandelten Bogenträgers gesucht. Fig. 141.

Mit $EJ' = EJ \cos \varphi = Konst.$ und Vernachlässigung von N bestehen die Gleichungen:

$$L' = \int \frac{\mathrm{M}}{EJ} ds \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial B} = \frac{1}{EJ'} \int \mathrm{M} dx \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial B} \text{ und } L'' = \frac{1}{EJ'} \int \mathrm{M} dx \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial H},$$

wobei L' und L'' die virtuellen Arbeiten der den Zuständen $X' = 1$ beziehw. $X'' = 1$ entsprechenden Auflagerkräfte bedeuten, während (da die Belastung jetzt $= 0$ vorausgesetzt ist)

$$\mathrm{M} = Hy + Bx, \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial B} = x \text{ und } \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial H} = y$$

wird. Man erhält

$$EJ'L' = \int (Hy + Bx)\, x dx, \quad EJ'L'' = \int (Hy + Bx)\, y dx$$

und, wegen $\int yx dx = 0$,

$$B = \frac{EJ'L'}{\int x^2 dx} = \frac{12 EJ'L'}{l^3}$$

und

$$H = \frac{EJ'L''}{\int y^2 dx} = \frac{5 EJ'L''}{f^2 l}.$$

Fig. 141.

Es senke sich nun (bei relativ fest gelegenem Stützpunkte A) der Stützpunkt B um δ, während l in $l + \Delta l$ übergehe, und sich die Auflagertangenten im Sinne der daselbst wirksamen Einspannungsmomente M_1 und M_2 um die Winkel

τ_1 und τ_2 drehen. Beachtet man dann, dass die äusseren Kräfte nur im Gleichgewichte sein können, wenn bei A Auflagerdrücke wirken, die den in B angreifenden gleich und entgegengesetzt sind, so findet man die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte

$$\mathfrak{A} = \mathrm{M}_1\tau_1 + \mathrm{M}_2\tau_2 - H\Delta l - B\delta,$$

und in diesen Ausdruck sind die aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathrm{M}_1 - Hf - B\frac{l}{2} = 0 \text{ und } \mathrm{M}_2 - Hf + B\frac{l}{2} = 0$$

folgenden Werthe

$$\mathrm{M}_1 = Hf + B\frac{l}{2} \text{ und } \mathrm{M}_2 = Hf - B\frac{l}{2}$$

einzuführen, so dass entsteht:

$$\mathfrak{A} = B\left[\frac{l}{2}(\tau_1 - \tau_2) - \delta\right] + H\left[f(\tau_1 + \tau_2) - \Delta l\right].$$

Hieraus folgt für den Zustand $B = 1$ der Werth: $L' = \frac{l}{2}(\tau_1 - \tau_2) - \delta$

und „ „ „ $H = 1$ „ „ $L'' = f(\tau_1 - \tau_2) - \Delta l$,

und es ergiebt sich mithin:

$$B = \frac{6EJ'}{l^2}\left(\tau_1 - \tau_2 - 2\frac{\delta}{l}\right),$$

$$H = \frac{5EJ'}{fl}\left(\tau_1 - \tau_2 - \frac{\Delta l}{f}\right).$$

Aufgabe 4. Ein krummer Stab ASB ohne Zwischengelenke sei beliebig belastet und ungleichmässig erwärmt. Gesucht ist die Aenderung Δl der Sehne AB, Fig. 142. Die Temperaturänderung folge innerhalb eines Querschnittes dem in Fig. 75 dargestellten Gesetze.

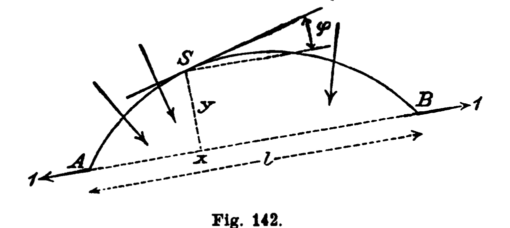


Fig. 142.

Es ergiebt sich nach Gleich. 54:

$$\Delta l = \int\frac{\mathrm{M}\overline{\mathrm{M}}\,ds}{EJ} + \int\frac{N\overline{N}\,ds}{EF} + \int\varepsilon t_0\overline{N}\,ds + \int\varepsilon\frac{\Delta t}{h}\overline{\mathrm{M}}\,ds,$$

wobei $\overline{\mathrm{M}}$ und $\overline{N}$ bezieh. das Moment und die Längskraft bedeuten, welche für irgend einen Querschnitt des Bogens durch zwei in A und B angreifende, in die Gerade AB fallende, nach aussen gerichtete Kräfte „Eins“ hervorgebracht werden.

Nun ist $\overline{\mathrm{M}} = 1 \cdot y$ und $\overline{N} = 1 \cdot \cos\varphi$, unter φ den Neigungswinkel der an die Bogenachse gelegten Tangente gegen die Sehne AB verstanden, und es ergiebt sich deshalb

$$(57)\quad \Delta l = \int \frac{\mathrm{M} y\, ds}{EJ} + \int \frac{N dx}{EF} + \int \varepsilon t_0 dx + \int \varepsilon \Delta t \frac{y}{h} ds.$$

Beispielsweise verlängert sich die Sehne AB eines symmetrischen, durch zwei der Scheiteltangente parallele Kräfte P belasteten und gleichmässig um t erwärmten Bogens, Fig. 143 (wegen $\mathrm{M} = Py$ und $N = P\cos\varphi$) um

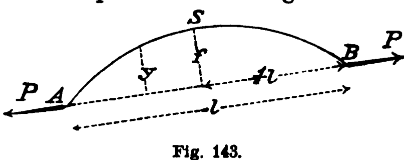


Fig. 143.

$$(58\mathrm{a})\quad \Delta l = P\int_0^l \frac{y^2 ds}{EJ} + P\int_0^l \frac{dx\cos\varphi}{EF} + \varepsilon t l.$$

Setzt man $J\cos\varphi = J$ und $F\sec\varphi = F'$ und führt an Stelle der veränderlichen Werthe J' und F' konstante Mittelwerthe ein, was in allen Fällen der Anwendung zulässig ist, so folgt bei parabolischer Achse (mit $y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$):

$$\Delta l = \frac{16Pf^2}{EJ'l^4}\int_0^l x^2(l-x)^2 dx + \frac{P}{EF'}\int_0^l dx + \varepsilon t l, \text{ d. i.}$$

$$(58\mathrm{b})\quad \Delta l = \frac{8Pf^2 l}{15EJ'} + \frac{Pl}{EF'} + \varepsilon t l.$$

Aufgabe 5. Gesucht ist die Aenderung Δl der Sehne l eines beliebig belasteten und ungleichmässig erwärmten Bogens ASB mit Zwischengelenken, Fig. 144.

Der Winkel $\mathfrak{T}$, welchen die zu beiden Seiten eines Gelenkes G an die Bogenachse gelegten Tangenten mit einander bilden, ändert sich im Allgemeinen um einen endlichen Werth $\Delta\mathfrak{T}$, und hierdurch vergrössert sich l um $\Delta l = f\Delta\mathfrak{T}$, wobei f das Loth von G auf l bedeutet. Wären alle $\Delta\mathfrak{T} = 0$, so würde sich der

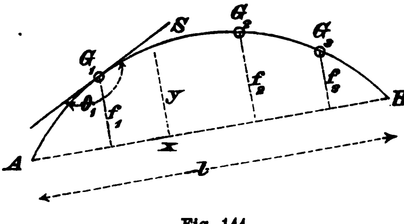


Fig. 144.

Bogen bezüglich der Aenderung Δl genau so verhalten wie ein solcher ohne Zwischengelenke, und es würde die Gleich. (57) giltig sein. Fügt man nun zu dem Ergebnisse dieser Gleichung den von den Aenderungen sämmtlicher Winkel $\mathfrak{T}$ herrührenden Werth $\Delta l = \Sigma f \Delta\mathfrak{T}$, so erhält man für einen Bogen mit beliebig vielen Zwischengelenken:

$$(59)\quad \Delta l = \int \frac{\mathrm{M} y\, ds}{EJ} + \int \frac{N dx}{EF} + \int \varepsilon t_0 dx + \int \varepsilon \Delta t \frac{y}{h} ds + \Sigma f \Delta\mathfrak{T}.$$

Aufgabe 6. Ein dünner Ring werde nach Fig. 145 mit zwei entgegengesetzt gleichen Kräften P belastet. Wie gross ist die Beanspruchung des Ringes und die gegenseitige Verrückung ∂ der beiden Angriffspunkte A. Vorausgesetzt sei, dass der Ring in Bezug auf die Achsen AA und BB symmetrisch ist.

Jeder der beiden Querschnitte B wird durch eine Längskraft $\frac{1}{2}P$ und ein auf statischem Wege nicht bestimmbares Moment X beansprucht, Fig. 146; an irgend einer Stelle C entsteht

$$\text{(I)} \quad \ldots\ldots \mathrm{M} = X - \frac{1}{2}Py \text{ und } N = \frac{1}{2}P\cos\varphi.$$

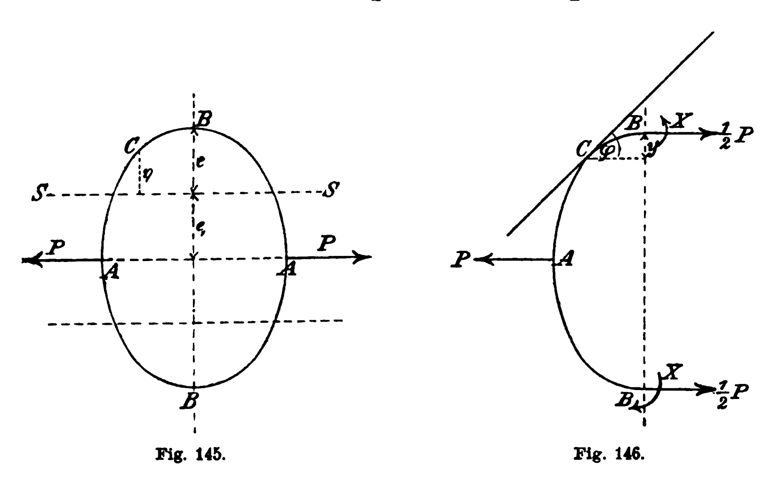


Fig. 145. Fig. 146.

Bei Berechnung von X darf die Formänderungsarbeit der Kräfte N vernachlässigt werden. Dann ergiebt sich

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \int \frac{\mathrm{M}}{EJ}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X}\,ds = \frac{1}{EJ}\int\left(X - \frac{1}{2}Py\right)ds = 0$$

und hieraus

$$X = \frac{1}{2}P\frac{\int_B^A y\,ds}{\int_B^A ds}.$$

Ist SS die den Kräften P parallele Schwerachse des Bogens BA und e ihr Abstand von B so wird sehr einfach

$$X = \frac{1}{2}Pe$$

und an der Stelle C

$$M = \frac{1}{2} P\eta \text{ (Fig. 145).}$$

Das grösste Moment (absolut genommen) entsteht bei A, nämlich

$$M = -\frac{1}{2} Pe_1.$$

Bei Berechnung der Strecke δ, um welche der Durchmesser AA zunimmt, darf ebenfalls der Einfluss der Kräfte N vernachlässigt werden. Es wird dann

$$\delta = \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{4}{EJ}\int_B^A P\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 ds = \frac{P}{EJ}\int_B^A \eta^2 ds = \frac{PT}{EJ},$$

wo T das Trägheitsmoment des Bogens BA in Bezug auf die Achse SS bedeutet.

Im allgemeinen findet man die Lage der SS und das Trägheitsmoment T am schnellsten zeichnerisch mit Hilfe von Seilpolygonen. Ist dagegen der Ring kreisförmig, Fig. 147, so ergiebt sich $e = r\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$, $e_1 = \frac{2r}{\pi}$. Die Momente bei B und A sind

$$M_B = \frac{Pr}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = + 0{,}182\, Pr; \; M_A = -\frac{Pr}{\pi} = -0{,}318\, Pr$$

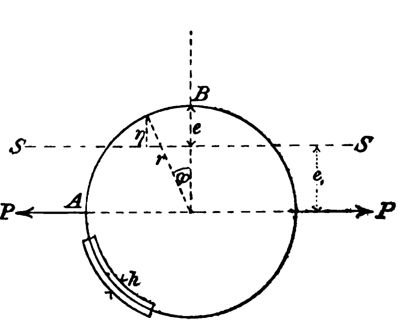


Fig. 147.

und das Trägheitsmoment T wird wegen

$$\eta = r\left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right)$$

$$T = r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right)^2 d\varphi = r^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right).$$

Für die Verrückung ∂ ergiebt sich daher der Werth:

$$\delta = \frac{Pr^3}{EJ}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right) = \frac{M_{max}\, r^2 (\pi^2 - 8)}{4EJ},$$

wo $M_{max} = M_A' = \frac{Pr}{\pi}$ (absolut genommen). Ist die Stärke des Ringes $= h$ und liegt der Schwerpunkt des Querschnitts in der Mitte von h, so ist die grösste Beanspruchung

$$\sigma = \frac{M_{max} h}{2J}$$

und man erhält die folgende Beziehung zwischen σ und δ:

$$\sigma = E \frac{\delta h}{r^2} \frac{2}{\pi^2 - 8} = 1{,}07\, E \frac{\delta h}{r^2};$$

dieselbe ist wichtig für die Beurtheilung ringförmiger Biegungungsfedern.

Aufgabe 7. Eine Blattfeder ABA sei nach Fig. 148 zwischen zwei Backen eingespannt, die bei $\mathfrak{G}$ gelenkartig miteinander befestigt

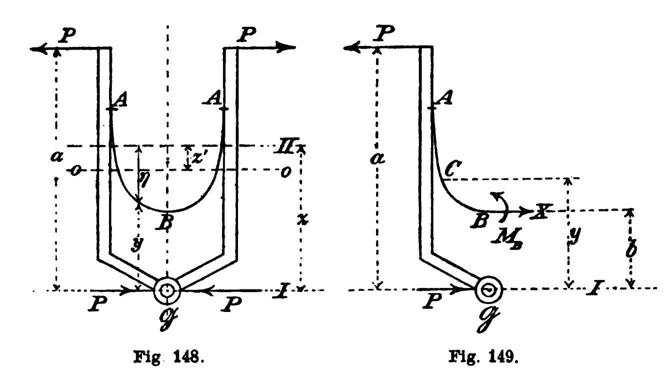


Fig. 148. Fig. 149.

sind und deren Formänderungen, verglichen mit denen der Feder, als vernachlässigbar klein angesehen werden dürfen. Die Backen werden durch Kräftepaare (Pa) gegeneinander um den Winkel τ gedreht. Wie gross ist die Beanspruchung der Feder? BG sei Symmetrieachse.

Bedeutet X die Längskraft und M_B das Biegungsmoment für den Querschnitt B (Fig. 149) so muss, damit Gleichgewicht bestehe,

$$M_B + Pa = Xb$$

sein, und hieraus folgt

$$M_B = Xb - Pa.$$

An der Stelle C ist

$$M = M_B + X(y - b) = Xy - Pa.$$

Zur Berechnung von X dient (unter Vernachlässigung der Formänderungsarbeit infolge der Kräfte N) die Bedingung

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} ds = \frac{1}{EJ} \int (Xy - Pa)\, y\, ds = 0$$

und hieraus ergiebt sich

$$X = Pa \frac{S_I}{T_I}$$

wo

$$\left.\begin{array}{l} T_I = \int y^2\, ds \text{ das Trägheitsmoment} \\ S_I = \int y ds \text{ das statische Moment} \end{array}\right\} \text{des Bogens } BA,$$

bezogen auf die durch den Gelenkmittelpunkt G und senkrecht zur Symmetrieachse BG gelegte Achse I bedeutet.

Bezieht man nun den Bogen BA auf eine neue Achse II, welche parallel zu I ist und von I den Abstand

$$z = \frac{T_I}{S_I}$$

hat, so erhält man, an der Stelle C das Moment

$$\mathrm{M} = Xy - Pa = Pa\frac{y-z}{z} = -\frac{Pa\eta}{z}$$

und findet, absolut genommen,

$$_{max}\mathrm{M} = \frac{Pa}{z} \cdot \eta_{max}$$

Der Winkel τ, um den sich die beiden Backen gegeneinander drehen, ist (wenn $Pa = \mathfrak{M}$ gesetzt wird)

$$\tau = \frac{\partial A}{\partial \mathfrak{M}} = 2\int_B^A \frac{\mathrm{M}}{EJ} \cdot \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathfrak{M}}\, ds = \frac{2Pa}{z^2 EJ}\int_B^A \eta^2 ds \cdot = \frac{2PaT_{II}}{z^2 EJ},$$

wo T_{II} das Trägheitsmoment des Bogens BA in Bezug auf die Achse II bedeutet. Bezeichnet man nun mit

s die Länge des Bogens BA,

z' den Abstand der Achse II von der Schwerachse 0

T_0 das Trägheitsmoment des Bogens BA, bezogen auf die Achse 0,

so erhält man

$$\begin{aligned} T_I &= T_0 + s(z-z')^2 \\ T_{II} &= T_0 + sz'^2 \\ T_{II} - T_I &= 2szz' - sz^2. \end{aligned}$$

Nun ist aber $T_I = zS_I$, ferner $S_I = s(z-z')$ weshalb

$$T_{II} = szz'$$

und

$$\tau = 2\frac{Pasz'}{zEJ} = 2\frac{\mathrm{M}_{max}\, sz'}{\eta_{max} EJ}.$$

Ist die Stärke der Feder (deren Querschnitt ein Rechteck sein möge) gleich h so ist die grösste, an der Stelle A auftretende Beanspruchung:

$$\sigma = \frac{\mathrm{M}_{max} h}{2J}$$

und die gesuchte Beziehung zwischen σ und τ lautet:

$$\sigma = \frac{1}{4} \tau E \frac{h \eta_{max}}{s z'} .$$

Die Ermittlung von z' und η_{max} geschieht im allgemeinen am zweckmässigsten durch Zeichnung mit Hilfe zweier Seilpolygone. Man zerlege den Bogen BA in gleiche lange Theilchen, betrachte dieselben als Kräfte, die parallel zur Achse I wirken und verbinde sie durch ein Seilpolygon S_1 (Fig. 150). Der Schnittpunkt der äussersten Polygonseiten bestimmt die Achse 0. Nun werden die von den Seileckseiten auf der Achse I abgeschnittenen Strecken als Kräfte aufgefasst, die in den Mittelpunkten der Bogentheilchen angreifen; dann wird ein zweites Seileck S_2 gezeichnet und dessen letzte Seite mit der ersten Seite zum Schnitt gebracht. Der Schnittpunkt bestimmt die Achse II, denn es ist — mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen —

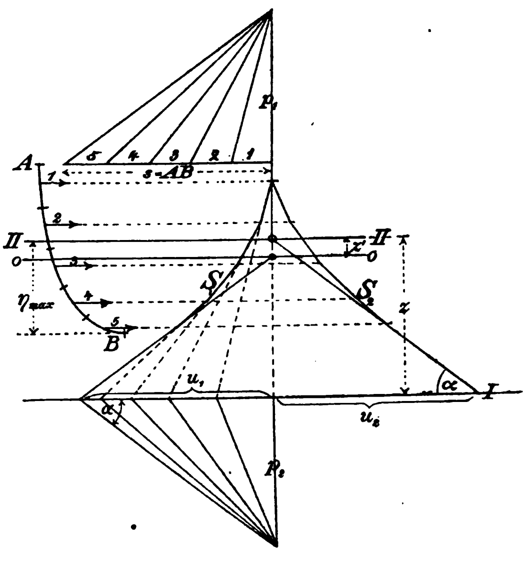


Fig. 150.

$$S_I = u_1 p_1 \qquad T_I = u_2 p_1 p_2$$

$$z = u_2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{u_2 p_2}{u_1} = \frac{T_I}{S_I} .$$

Damit sind aber die Strecken z' und η_{max} bestimmt.

In einfacheren Fällen wird man der **Berechnung** von z' und η_{max} den Vorzug geben.

Mit Hilfe der vorstehenden Untersuchung ist man z. B. im Stande, anzugeben, welche Beanspruchung die in Fig. 151 dargestellte Feder im Scheitel eines Dreigelenkbogens infolge der gegenseitigen Drehung der beiden Bogenhälften erfährt. Vergl. Aufgabe 2 auf Seite 55; der Drehungswinkel wurde dort mit δ bezeichnet und mit Hilfe einer Einflusslinie ermittelt.

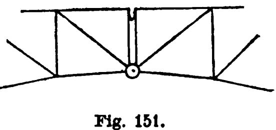


Fig. 151.

§ 18.

Die Biegungslinie.

Trägt man die nach unten positiv gezählten, senkrechten Verschiebungen δ der Punkte der in einer lothrechten Ebene gedachten Achse ASB eines einfach gekrümmten Stabes von einer Geraden $A'B'$ aus als Ordinaten auf, so erhält man die **Biegungslinie** $A''S''B''$; die zwischen ihr und der Geraden $A'B'$ gelegene Fläche heisse die **Biegungsfläche**. Fig. 152.

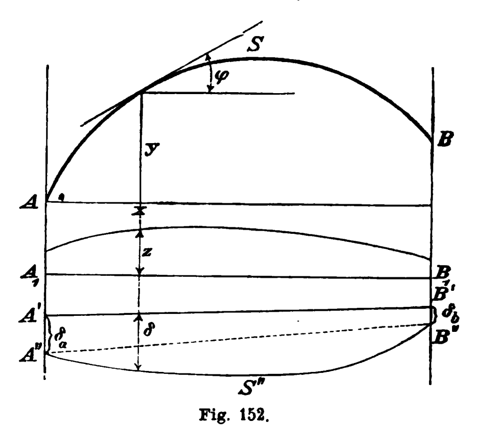


Fig. 152.

1) Bestimmung der Biegungslinie für ein Stabstück AB ohne Zwischengelenke. Die Stabachse möge auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit nach oben positiver, senkrechter y-Achse bezogen werden; φ bedeute den Neigungswinkel der im Punkte xy an die Stabachse gelegten Tangente gegen die x-Achse. Fig. 152.

Die Aenderung Δy von y ergiebt sich durch Differentiiren der Gleichung

$$dy = ds \sin \varphi,$$

wobei das Differentialzeichen durch das Zeichen Δ zu ersetzen ist. Man erhält

$$\Delta dy = \Delta ds \sin \varphi + ds \cos \varphi \Delta \varphi$$
$$= \frac{\Delta ds}{ds} dy + \Delta \varphi dx,$$

und es folgt, da $\delta = -\Delta y$ also

$$d\delta = -d\Delta y = -\Delta dy^{*})$$

ist:

$$-\frac{d\delta}{dx} = \Delta \varphi + \frac{\Delta ds}{ds} \operatorname{tg} \varphi,$$

woraus (durch Differentiiren nach x) die **Differentialgleichung der Biegungslinie**

$$(60) \quad -\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{\Delta d\varphi}{dx} + \frac{d\left(\frac{\Delta ds}{ds} \operatorname{tg} \varphi\right)}{dx}$$

---

*) Nach einem bekannten Satze der Variationsrechnung dürfen die Zeichen d und Δ vertauscht werden.

gefunden wird. Mit der Bezeichnung

$$(61) \quad z = \frac{\Delta d\varphi}{dx} + \frac{d\left(\frac{\Delta ds}{ds}\operatorname{tg}\varphi\right)}{dx}$$

wird

$$-\frac{d^2\delta}{dx^2} = z,$$

und hieraus folgt,

*dass die Biegungslinie $A''S''B''$ als ein Seilpolygon aufgefasst werden darf, welches mit dem Horizontalzuge (Polabstande) 1 zu einer Belastungslinie, deren Ordinate $= z$ ist, gezeichnet wird.**)

Die Belastungsrichtung z ist nach unten (also im Sinne der positiven δ) positiv.

Weiter ergiebt sich aus der graphischen Statik, dass die Fläche zwischen der Biegungslinie $A''S''B''$ und der Geraden $A''B''$ angesehen werden darf

als die Momentenfläche eines einfachen, d. h. an den Enden frei aufliegenden Balkens $A_1 B_1$, dessen Belastungslinie die Ordinate z hat.

Sind die senkrechten Verschiebungen δ_a und δ_b der Endpunkte A und B des betrachteten Bogenstückes gleich Null, so stimmt die Biegungslinie mit der Momentenkurve des einfachen Balkens $A_1 B_1$ überein.

Handelt es sich nun (ebenso wie im § 17) um Stäbe, deren Krümmungsradien im Vergleiche zur Stabdicke sehr gross sind, und auf deren Spannungen und Formänderungen die im § 14 entwickelten Grundgleichungen angewendet werden dürfen, so ist in Gleich. 61 einzuführen:

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF} + \varepsilon t_0 \text{ (nach. Gleich. 44, Seite 84)}$$

und, da die Aenderung $\Delta d\varphi$ des von zwei unendlich nahen Tangenten eingeschlossenen Winkels $d\varphi$ mit dem im § 14 mit $d\tau$ bezeichneten Winkel übereinstimmt, um welchen sich ein Stabquerschnitt gegen seinen Nachbarquerschnitt dreht,

$$\Delta d\varphi = \left(\frac{M}{EJ} + \varepsilon\frac{\Delta t}{h}\right) ds \text{ (nach Gleich. 45, Seite 84)}$$

also

$$\frac{\Delta d\varphi}{dx} = \left(\frac{M}{EJ} + \varepsilon\frac{\Delta t}{h}\right) \sec\varphi.$$

Es ergiebt sich mithin:

---

*) Die Differentialgleichung einer Seillinie mit dem Horizontalzuge H und der Belastungsordinate z ist, bezogen auf rechtwinklige Koordinaten (yx):

$$\pm H\frac{d^2y}{dx^2} = z.$$

$$(62) \quad z = \left(\frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{\Delta t}{h}\right) \sec \varphi + \frac{d\left[\left(\frac{N}{EF} + \varepsilon t_0\right) \operatorname{tg} \varphi\right]}{dx}$$

und es lässt sich jetzt die Biegungslinie $A''S''B''$ für jeden Belastungszustand ermitteln. Bedingung ist nur, dass zwischen den Endpunkten A und B des betrachteten Stabstückes kein Gelenk liegt, da der Winkel, welchen die zu beiden Seiten eines Gelenkes an die Bogenachse gelegten Tangenten mit einander bilden, sich im allgemeinen um einen endlichen Werth ändern wird.

Hervorzuheben ist noch, dass zur Bestimmung der Verschiebungen δ ausser der Linie $A''S''B''$ die Werthe δ für 2 Punkte der Stabachse ASB gegeben sein müssen, damit die Lage der Geraden $A'B'$ festgelegt werden kann.

2) **Einführung von Einzellasten an Stelle der z-Linie.** Die Stabachse sei durch Punkte, welche Knotenpunkte heissen sollen, in Stücke zerlegt, deren wagerechte Projektionen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_m \ldots\ldots$ sind. Zwischen zwei Knotenpunkten werde der Querschnitt des Bogens konstant angenommen und sowohl die Momentenkurve als auch die Bogenachse durch eine gerade Linie ersetzt. Es bezeichne (Fig. 153):

M_m das Biegungsmoment für den m^{ten} Knotenpunkt,

J_m das Trägheitsmoment | für den Querschnitt des Bogenstückes
F_m den Inhalt | $(m-1)\, m$,

s_m die Länge der die Punkte $(m-1)$ und m verbindenden Sehne,

φ_m den Neigungswinkel dieser Sehne gegen die Wagerechte,

δ_m die Senkung des Knotenpunktes m (auch Durchbiegung bei m genannt),

y_m die Ordinate von m,

N_m den Mittelwerth der Längskraft für das Bogenstück $(m-1)\, m$,

J_o ein beliebiges, konstantes Querschnitts-Trägheitsmoment,

λ_o eine beliebige, konstante Feldweite,

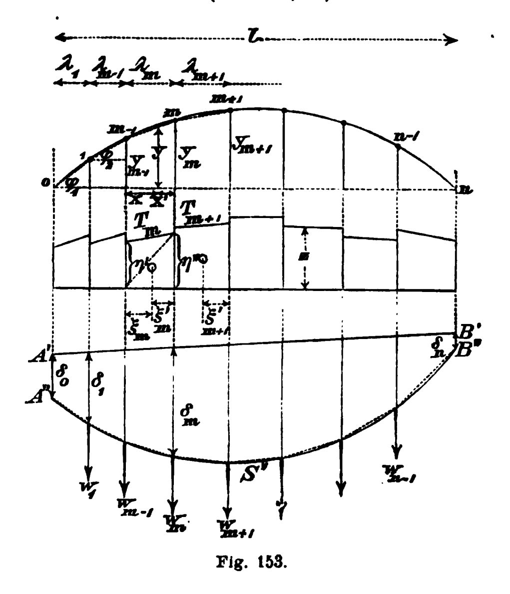


Fig. 153.

und es sei gesetzt $\qquad J_m \cos \varphi_m = J'_m.$

Der von den Biegungsmomenten abhängige Theil der Belastungslinie, um dessen Einfluss auf die Durchbiegungen es sich zunächst handeln möge, besteht aus geraden Linien, und es ist somit die Belastungsfläche für irgend eine Strecke λ_m ein Trapez, dessen Inhalt mit T_m bezeichnet werden soll. Dieses Trapez ist bestimmt durch die Ordinaten

$$\eta' = \frac{M_{m-1}}{EJ'_m} \text{ und } \eta'' = \frac{M_m}{EJ'_m}.$$

Wird nun das der Biegungslinie einbeschriebene Polygon, dessen Ecken senkrecht unter den Knotenpunkten liegen, gesucht, so darf (nach einem hier als bekannt vorausgesetzten Satze aus der Theorie der Biegungsmomente, als welche ja die Durchbiegungen δ aufgefasst werden dürfen) die Belastungsfläche durch eine Schaar von Einzellasten ersetzt werden, welche in die Senkrechten durch die Knotenpunkte fallen. Die durch m gehende Einzellast ist hierbei

$$w_m = \frac{T_m \xi_m}{\lambda_m} + \frac{T_{m+1} \xi'_{m+1}}{\lambda_{m+1}},$$

wenn ξ_m und ξ'_{m+1} die Abstände der Schwerpunkte der Trapeze T_m und T_{m+1} von den Senkrechten durch $m-1$ und $m+1$ bedeuten. Das statische Moment des Trapezes (welches man sich in zwei Dreiecke zerlegt denke) ist

$$T_m \xi_m = \eta' \frac{\lambda_m}{2} \frac{\lambda_m}{3} + \eta'' \frac{\lambda_m}{2} \frac{2\lambda_m}{3} = \frac{\lambda_m^2}{6EJ'_m} (M_{m-1} + 2M_m)$$

und ebenso folgt

$$T_{m+1} \xi'_{m+1} = \frac{\lambda_{m+1}^2}{6EJ'_{m+1}} (M_{m+1} + 2M_m),$$

weshalb entsteht:

$$w_m = \frac{1}{6E} \left[\frac{\lambda_m}{J'_m} (M_{m-1} + 2M_m) + \frac{\lambda_{m+1}}{J'_{m+1}} (M_{m+1} + 2M_m) \right].$$

Für die Vergrösserung, welche die Einzellast w erfahren muss, wenn der Einfluss der Aenderungen Δs der Strecken s berücksichtigt werden soll, ergiebt sich aus der Fachwerkstheorie der Werth

$$w_m = \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \varphi_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \varphi_m \text{ [nach § 5]*)}$$

und es folgt, wenn (für den Fall $t = 0$):

*) Geht man zur Grenze über, indem man λ durch dx ersetzt, so wird $\frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \varphi_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \varphi_m = d\left(\frac{\Delta ds}{ds} \operatorname{tg} \varphi\right)$, und es folgt, wenn die Einzellast w_m durch das Element $z\,dx$ einer Belastungsfläche ersetzt wird, genau wie früher die Ordinate $z = \frac{d\left(\frac{\Delta ds}{ds} \operatorname{tg} \varphi\right)}{dx}$.

$$\frac{\Delta s_m}{s_m} = \frac{N_m}{EF_m} \text{ und } \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} = \frac{N_{m+1}}{EF_{m+1}}$$

eingeführt wird, im Ganzen

$$w_m = \frac{\lambda_c}{EJ_c}\left[\omega_m - \left(\frac{N_m}{F_m}\operatorname{tg}\varphi_m - \frac{N_{m+1}}{F_{m+1}}\operatorname{tg}\varphi_{m+1}\right)\frac{J_c}{\lambda_c}\right],$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$(63)\quad \omega_m = \frac{1}{6}\left[\frac{J_c}{J'_m}\frac{\lambda_m}{\lambda_c}(\mathrm{M}_{m-1} + 2\,\mathrm{M}_m) + \frac{J_c}{J'_{m+1}}\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_c}(\mathrm{M}_{m+1} + 2\,\mathrm{M}_m)\right].$$

Zeichnet man zu den Gewichten w mit dem Polabstande „Eins" ein Seilpolygon $A''S''B''$ und trägt die Schlusslinie $A'B'$ ein, wozu 2 Verschiebungen δ gegeben sein müssen (meistens die Werthe $\delta_0 = 0$ und $\delta_n = 0$), so erhält man die Durchbiegungen δ. Noch besser ist es, die Einzellasten w mittels der Gleichung

$$(64)\quad w_m = \omega_m - \left(\frac{N_m}{F_m}\operatorname{tg}\varphi_m - \frac{N_{m+1}}{F_{m+1}}\operatorname{tg}\varphi_{m+1}\right)\frac{J_c}{\lambda_c}$$

zu berechnen; man muss dann die Polentfernung „Eins" durch die Entfernung $\mathfrak{H} = \frac{EJ_c}{\lambda_c}$ ersetzen. Wählt man hierfür $\mathfrak{H} = \frac{EJ_c}{\gamma\lambda_c}$, wobei γ eine beliebige runde Zahl ist, so sind die Ordinaten des Seilpolygons gleich den mit γ multiplicirten Durchbiegungen.*)

Wenn der **Einfluss einer Temperaturänderung** berücksichtigt werden soll, so muss

$\frac{\mathrm{M}}{EJ'} + \varepsilon\frac{\Delta t}{h'}$ an die Stelle von $\frac{\mathrm{M}}{EJ'}$ treten

und $\frac{N}{EF} + \varepsilon t_0$ „ „ „ „ $\frac{N}{EF}$ (nach Gleich. 62).

Hierbei ist $h' = h\cos\varphi$ die vertikale Projektion der Querschnittshöhe h.

Macht man die Annahme, dass t_0 und Δt für sämmtliche Bogenquerschnitte gleich gross sind und bezeichnet den Werth von h' für das m^{te} Feld mit h'_m, so findet man leicht, dass die durch die Gleich. (64) gegebene Einzellast w_m beim Eintreten einer Temperatur-Aenderung um

$$(65)\quad w'_m = \frac{\varepsilon EJ_c}{\lambda_c}\left[\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\lambda_m}{h'_m} + \frac{\lambda_{m+1}}{h'_{m+1}}\right) - t_0(\operatorname{tg}\varphi_m - \operatorname{tg}\varphi_{m+1})\right]$$

vergrössert werden muss. Ist die Bogenachse eine in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte symmetrische Parabel mit dem Pfeile f, so ist

$$(66)\quad \operatorname{tg}\varphi_m - \operatorname{tg}\varphi_{m+1} = \frac{4f}{l^2}(\lambda_m + \lambda_{m+1}),$$

*) Bezüglich der Einheiten ist zu betonen, dass sowohl die Werthe ω und w als auch die Polentfernung $\mathfrak{H}$ Momente vorstellen.

und es folgt dann bei konstantem λ und h' für alle Knotenpunkte der gleiche Werth

$$(67) \quad w'_m = \frac{\varepsilon E J_c}{2}\left(\frac{\Delta t}{h'} - 8 t_0 \frac{f}{l^2}\right);$$

derselbe ist auch bei flachen Kreisbögen brauchbar.

3) Bestimmung des Integrales: $\int y \frac{M ds}{EJ}$ **mit Hilfe der Werthe** ω. Zuweilen soll gleichzeitig mit den Verschiebungen δ eines Bogenträgers die Aenderung Δl der Stützweite l bestimmt werden. Wird hierzu die auf Seite 150 abgeleitete Gleich. (57) benutzt, so handelt es sich u. A. um die Berechnung des Integrales

$$\int_0^l y \frac{M ds}{EJ} = \int_0^l y \frac{M dx}{EJ'},$$

und es möge daher an dieser Stelle gezeigt werden, wie sich dieses Integral durch die bereits bei der Berechnung der δ gebrauchten Werthe ω ausdrücken lässt.

Für das Feld λ_m ergiebt sich mit den aus Fig. 153 zu ersehenden Bezeichnungen:

$$y = y_{m-1} \frac{x'}{\lambda_m} + y_m \frac{x}{\lambda_m} \text{ und}$$

$$\int_0^{\lambda_m} y \frac{M dx}{EJ'} = \frac{y_{m-1}}{\lambda_m} \int_0^{\lambda_m} x' \frac{M}{EJ'} dx + \frac{y_m}{\lambda_m} \int_0^{\lambda_m} x \frac{M}{EJ'} dx$$

$$= \frac{y_{m-1}}{\lambda_m} T_m \xi'_m + \frac{y_m}{\lambda_m} T_m \xi_m;$$

denn es sind $\int_0^{\lambda_m} x' \frac{M}{EJ'} dx$ und $\int_0^{\lambda_m} x \frac{M}{EJ'} dx$ die statischen Momente des Belastungstrapezes T_m in Bezug auf die Senkrechten durch die Knotenpunkte m und $m-1$. Es folgt deshalb für den ganzen Bogen (mit $y_0 = 0$ und $y_n = 0$):

$$\int_0^l y \frac{M dx}{EJ'} = y_1 \frac{T_1 \xi_1}{\lambda_1} + y_1 \frac{T_2 \xi'_2}{\lambda_2} + y_2 \frac{T_2 \xi_2}{\lambda_2} + y_2 \frac{T_3 \xi'_3}{\lambda_3} + \ldots\ldots$$

$$+ y_{n-1} \frac{T_{n-1} \xi_{n-1}}{\lambda_{n-1}} + y_{n-1} \frac{T_n \xi'_n}{\lambda_n},$$

und hierfür kann, mit Beachtung der Entwickelungen auf Seite 160, geschrieben werden

$$(68) \quad \int_0^l y \frac{M dx}{EJ'} = \frac{\lambda_c}{EJ_c} \sum_{m=1}^{m=n-1} y_m \omega_m.$$

Fasst man die Werthe ω als Kräfte auf, welche in den Knotenpunkten 0, 1, . . . *m* . . . angreifend, parallel zu $\overline{on}$ sind und zeichnet mit dem Polabstande $\mathfrak{H}$ ein Seilpolygon, dessen äusserste Seiten auf der Geraden $\overline{on}$ die Strecke *e* abschneiden, Fig. 154, so ergiebt sich

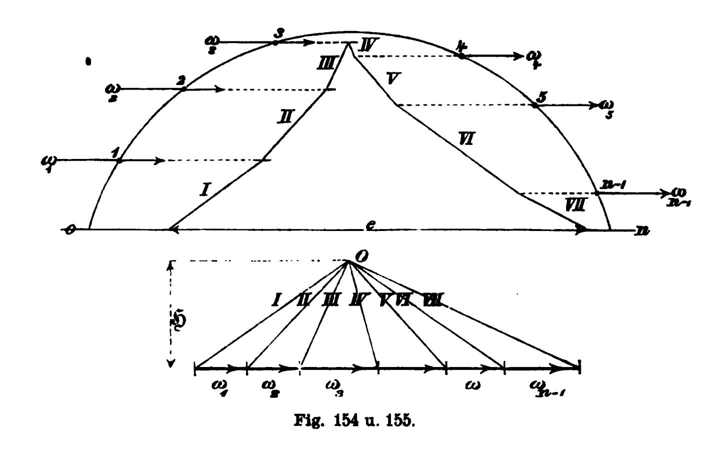


Fig. 154 u. 155.

$$\Sigma y \omega = \mathfrak{H} e$$

und es folgt, wenn $\mathfrak{H} = \frac{E J_c}{\lambda_c \gamma}$ gewählt wird, wobei γ eine beliebige Zahl bedeutet,

$$\int_0^l y \frac{M dx}{E J'} = \frac{e}{\gamma}.$$

$\frac{e}{\gamma}$ stellt eine Linie vor, nämlich die von den Biegungsmomenten herrührende Verlängerung Δl der Stützweite *l*.

Wendet man die unter 2) und 3) mitgetheilten Verfahren auf die Berechnung der Formänderungen von Bogenbrücken an, so genügt es in der Regel, die Punkte, in denen die senkrechten, zwischen die Fahrbahn und den Bogen eingeschalteten Stäbe die Bogenachse schneiden, als Knotenpunkte in dem vorhin erklärten Sinne anzunehmen. Fig. 156. In der Regel ist die Feldweite λ konstant, und es wird dann $\lambda_c = \lambda$ gesetzt.

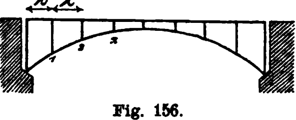


Fig. 156.

4) Biegungslinie für einen Stab mit Zwischengelenken. Liegt im Punkte *G* der Stabachse (Fig. 157) ein Gelenk, so wird sich der Winkel $\mathfrak{T}$, welchen die beiden in *G* an die angrenzenden Zweige der Stabachse gelegten Tangenten *I* und *II* miteinander bilden, in Folge der

Formänderung des Stabes um den sehr kleinen aber endlichen Werth $\Delta\vartheta$ ändern. Es müssen dann die in dem senkrecht unter G gelegenen Punkte G'' an die entsprechenden Zweige $A''G''$ und $G''B''$ der Biegungslinie gelegten Tangenten I' und II' miteinander den Winkel $\Delta\vartheta$ einschliessen. Bedeuten α_1 und α_2 die Neigungswinkel der Tangenten I' und II', so ergiebt sich

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \Delta\vartheta$$

oder, da es sich hier um sehr kleine Formänderungen handelt,

$$\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2 = \Delta\vartheta$$

und hieraus folgt (vgl. Fig. 157, in welcher O den Pol der Seillinie und LT den Kräftezug vorstellt), *dass bei der Aufzeichnung der Seillinie $A''S''B''$ ausser der stetigen Belastung (z) noch unter jedem Gelenke eine Einzellast $\Delta\vartheta$ anzunehmen ist.*

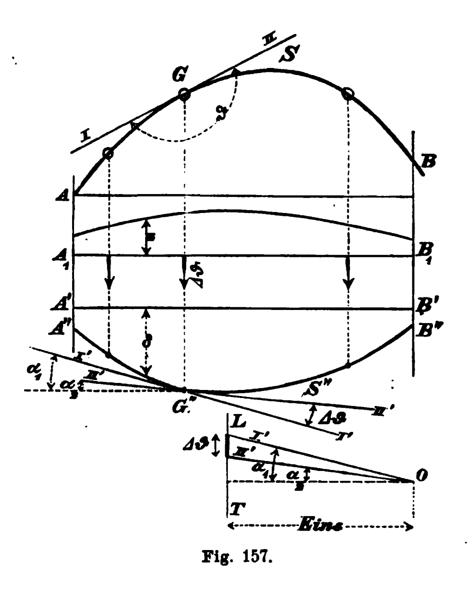


Fig. 157.

Beispiel. Biegungslinie eines Bogens mit 3 Gelenken. Die Kämpfer A und B seien in senkrechter Richtung unverschieblich, die Stützweite l gehe in Folge Nachgebens der Widerlager über in $l + \Delta l$. Die gesuchte Biegungslinie stimmt mit der Momentenkurve eines einfachen Balkens A_1B_1 überein, auf welchen eine stetige Belastung mit der durch die Gleich. (62) gegebenen Ordinate z und eine Einzellast $\Delta\vartheta$ wirkt. Zuerst möge $\Delta\vartheta = 0$ angenommen werden; es entsteht dann eine Biegungslinie, die am besten mit Hilfe des unter 2) gegebenen Verfahrens bestimmt wird und deren Ordinate $= \delta'$ sein möge. In Folge von $\Delta\vartheta$ wird der Werth δ für einen Punkt D, links vom Scheitel, um $\frac{\Delta\vartheta b}{l} x$ vergrössert und für einen Punkt D',

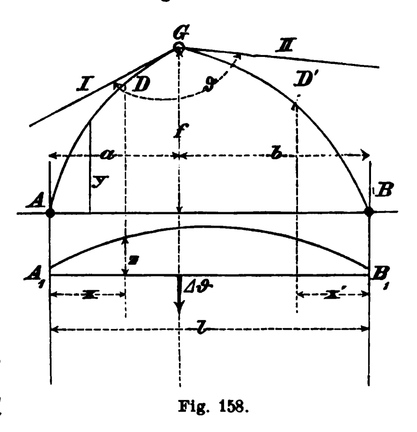


Fig. 158.

rechts vom Scheitel, um $\frac{\Delta\mathfrak{H}a}{l}x'$*), weshalb sich ergiebt:

$$\delta = \delta' + \Delta\mathfrak{H}\frac{bx}{l}, \text{ beziehungsweise } \delta = \delta' + \Delta\mathfrak{H}\frac{ax'}{l}.$$

Hat man nun mittelst der auf Seite 150 entwickelten Gleichung

$$\Delta l = \int_0^l \frac{Myds}{EJ} + \int_0^l \frac{Ndx}{EF} + \int_0^l \varepsilon t_0 dx + \int_0^l \varepsilon \Delta t \frac{y}{h} ds + f\Delta\mathfrak{H}$$

den Werth $\Delta\mathfrak{H}$ berechnet, wobei mit Bezugnahme auf Seite 162: $\int_0^l \frac{Myds}{EJ} = \frac{e}{\gamma}$ gesetzt werden darf, so vermag man die Verschiebung δ eines jeden Punktes der Stabachse festzustellen.

5) Nicht immer ist es bei Bögen mit Zwischengelenken nöthig, die Aenderungen $\Delta\mathfrak{H}$ zu berechnen. Ein Beispiel hierfür bietet die Lösung der folgenden (der Aufgabe 2 auf Seite 40 gegenüber zu stellenden)

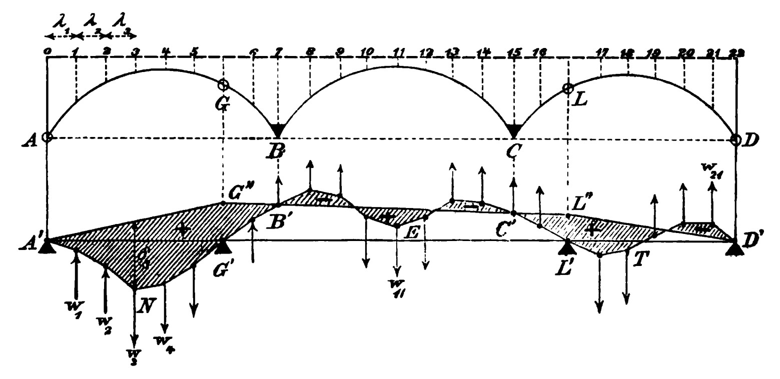


Fig. 159.

Aufgabe: Gesucht wird die Biegungsfläche eines über 3 Oeffnungen gespannten kontinuirlichen Bogens mit 4 Gelenken *A*, *D*, *G* und *L* (Fig. 159).**)

*) Die auf A_1B_1 wirkende Einzellast $\Delta\mathfrak{H}$ erzeugt die Auflagerwiderstände $\frac{\Delta\mathfrak{H}b}{l}$ (bei A_1) und $\frac{\Delta\mathfrak{H}a}{l}$ (bei B_1) und die Biegungsmomente $\frac{\Delta\mathfrak{H}b}{l}x$ (bei x) und $\frac{\Delta\mathfrak{H}a}{l}x'$ (bei x').

**) Bei B und C sind keine Gelenke angeordnet, die einzelnen Bögen sind vielmehr über den Auflagern fest mit einander verbunden. Ein besonderer Fall dieses Bogenträgers ist der bekannte Gerber'sche Balken.

Die senkrechten Verschiebungen der Stützpunkte A, B, C, D seien $= 0$. Es soll, wie unter 2), mit Einzellasten w an Stelle der Belastung z gerechnet werden.

Man zeichne mit der Polentfernung $\mathfrak{H} = \frac{EJ_c}{\lambda}$:

das Momentenpolygon $A'NG'$ für den einfachen Balken $A'G'$ mit den Lasten w_1 bis w_5,

das Momentenpolygon $G'EL'$ für den einfachen Balken $G'L'$ mit den Lasten w_6 bis w_{16} und

das Momentenpolygon $L'TD'$ für den einfachen Balken $L'D'$ mit den Lasten w_{17} bis w_{21},*)

bringe die Auflagersenkrechten durch B und C mit dem Momentenpolygone $G'EL'$ in B' und C' zum Schnitt, lege durch B' und C' eine Gerade, welche die Senkrechten durch die Gelenke in G'' und L'' schneidet und verbinde A' mit G'' und D' mit L'' durch Geraden. Die zwischen den Momentenpolygonen und dem Linienzuge $A'G''L''D'$ gelegene Fläche ist die gesuchte Biegungsfläche.

6) **Die elastische Linie des geraden Balkens** ist ein besonderer Fall der Biegungslinie eines krummen Stabes; ihre Differentialgleichung ist (mit $\varphi = 0$)

$$(69)\qquad -\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{\mathrm{M}}{EJ} + \varepsilon\frac{\Delta t}{h},$$

und sie stimmt mit einem Seilpolygone überein, welches mit dem Polabstande 1 zu einer Belastungslinie, deren Ordinate

$$(70)\qquad z = \frac{\mathrm{M}}{EJ} + \varepsilon\frac{\Delta t}{h}$$

ist, gezeichnet wird.

Sind die senkrechten Verschiebungen der Endpunkte A und B des betrachteten Balkenstückes $= 0$, so lässt sich die elastische Linie als Momentenkurve eines einfachen Balkens AB auffassen, dessen Belastungshöhe an der Stelle x gleich z ist.

Bei konstantem EJ empfiehlt es sich,

$$(71)\qquad z = \mathrm{M} + \varepsilon EJ\frac{\Delta t}{h}$$

zu setzen. Bedeutet dann (M) die Ordinate der durch diese Belastungslinie bedingten Momentenkurve (welche auch die zweite Momentenkurve des Balkens AB heisst), so ist

$$(72)\qquad \delta = \frac{(\mathrm{M})}{EJ}.$$

*) In Fig. 159 wurden die nach Gleich. 64 zu berechnenden Werthe w_3 bis w_5, w_{10} bis w_{12} und w_{17} und w_{18} positiv (d. h. abwärts gerichtet), die übrigen w hingegen negativ angenommen.

Beispiel. Auf einen Balken mit konstantem EJ, Fig. 160, der an den Enden frei aufliegt, wirken zwei Einzellasten P. Es sollen die Durchbiegungen δ an den Stellen x und x_1 berechnet werden. Temperaturänderungen Δt seien ausgeschlossen.

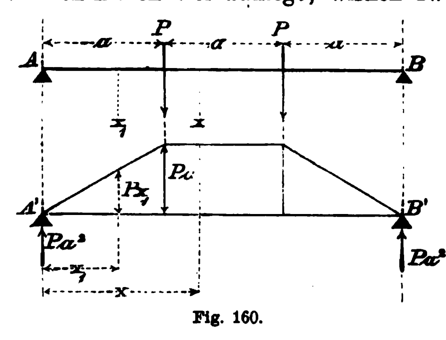


Fig. 160.

Die Momentenfläche ist ein Trapez, dessen Höhe $= Pa$ und dessen Inhalt $= 2Pa^2$ ist; sie wird als Belastungsfläche des einfachen Balkens $A'B'$ aufgefasst und ruft an dessen Auflagern die Gegendrücke Pa^2 hervor. Das zweite Moment für den Querschnitt bei x ist deshalb

$$(M) = Pa^2x - \frac{Pa^2}{2}\left(x - \frac{2a}{3}\right) - Pa(x-a)\frac{x-a}{2}$$

$$= \frac{Pa(9ax - 3x^2 - a^2)}{6}$$

und die gesuchte Durchbiegung:

$$\delta = \frac{Pa(9ax - 3x^2 - a^2)}{6EJ}.$$

An Stelle x_1 findet man das zweite Moment

$$(M) = Pa^2x_1 - Px_1\frac{x_1}{2}\cdot\frac{x_1}{3} = \frac{Px_1(6a^2 - x_1^2)}{6}$$

und die Durchbiegung

$$\delta = \frac{Px_1(6a^2 - x_1^2)}{6EJ}.$$

§ 19.

Der Maxwell'sche Satz.

Der im § 10 für das Fachwerk bewiesene, an die Voraussetzungen $L = 0$, $\Delta t = 0$ gebundene Maxwell'sche Satz gilt auch für alle den Annahmen des § 13 entsprechenden, auf Biegungsfestigkeit beanspruchten stabförmigen Körper, was ohne weiteres einleuchtet, wenn die auf Seite 53 für die Wege δ_{mn} und δ_{nm} aufgestellten Gleichungen durch die Beziehungen

$$\delta_{mn} = \int \sigma_m \left(\frac{\Delta ds_v}{ds}\right)_n dV = \int \frac{\sigma_m \sigma_n dV}{EF} \quad \text{und}$$

$$\delta_{nm} = \int \sigma_n \left(\frac{\Delta ds_v}{ds}\right)_m dV = \int \frac{\sigma_n \sigma_m dV}{EF}$$

ersetzt werden.

Aufgabe 1. Gesucht ist die Einflusslinie für die Senkung δ eines Punktes D der Achse eines Bogenträgers ASB (Fig. 161).

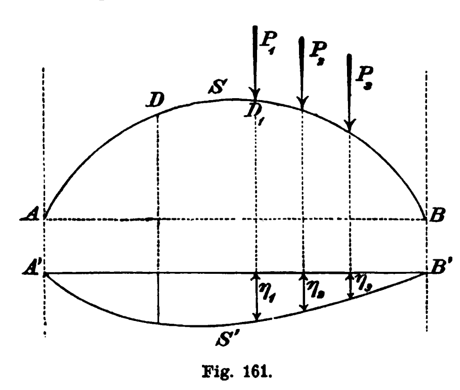


Fig. 161.

Wir denken den gewichtslosen Träger nur mit einer in D angreifenden senkrechten Kraft „Eins" belastet, berechnen die hierdurch hervorgerufenen Auflagerkräfte, Momente M und Längskräfte N und zeichnen nach der im § 18 gegebenen Anleitung die Biegungslinie $A'S'B'$. Ist nun die unter D_1 gemessene Ordinate dieser Linie $= \eta_1$, so verschiebt die in D gedachte Last „Eins" den Punkt D_1 in senkrechtem Sinne um η_1 nach unten, und es wird mithin (nach Satz 1) eine in D_1 angreifende Last „Eins" den Punkt D ebenfalls um η_1 senken. Hieraus folgt, dass die Biegungslinie $A'S'B'$ die gesuchte Einflusslinie für die Senkung δ des Punktes D ist. Beispielsweise senken die Lasten P_1, P_2, P_3 den Punkt D um

$$\delta = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3.$$

Die Einflusslinie $A'S'B'$ für die Senkung δ des Punktes D der Achse eines Balkens AB mit veränderlichem Querschnitte (Fig. 162) stimmt mit der Momentenkurve eines einfachen Balkens $A'B'$ überein, dessen Belastungsordinate

$$z = \frac{M'}{EJ}$$

ist, wobei M' das Biegungsmoment bedeutet, welches für irgend einen Balkenquerschnitt durch eine in D angreifende Last „Eins" erzeugt wird. Die Momentenfläche für diesen Belastungsfall ist ein Dreieck $A'LB'$ von der Höhe $\overline{LD'} = 1 \cdot \frac{ab}{l}$.

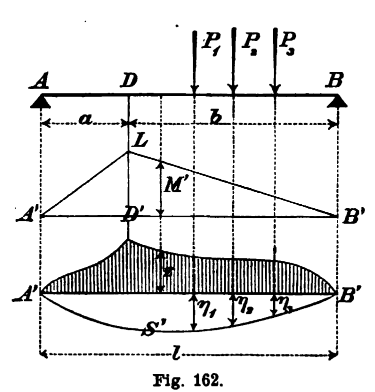


Fig. 162.

Für die Anwendung ist, bei konstantem E, zu empfehlen, die Belastungshöhe $z = \frac{M'}{EJ}$ durch

$$z = M' \frac{J_c}{J}$$

zu ersetzen, unter J_c ein beliebiges aber konstantes Querschnitts-Trägheitsmoment verstanden. Die Momentenkurve $A'S'B'$ ist dann nicht mehr die Einflusslinie für die Verschiebung δ, sondern für den Werth $EJ_c\delta$, und man erhält für die Belastung in Fig. 161

$$\delta = \frac{1}{EJ_c}(P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3).$$

Aufgabe 2. Gesucht ist die Einflusslinie für den Gegendruck X der Mittelstütze eies geraden kontinuirlichen Balkens mit veränderlichem Querschnitte und mit 3 gleich hohen Stützpunkten. Fig. 163.

Beseitigung der Mittelstütze führt zu dem statisch bestimmten Balken AB. Für diesen wird, unter der Voraussetzung, dass bei C eine senkrechte, abwärts gerichtete Last „Eins" angreift, die Momentenfläche $A'DB'$ gezeichnet (Dreieck mit der Höhe $\overline{C'D} = 1 \cdot \frac{l_1 l_2}{l}$) und hierauf wird eine Linie $A'D'B'$ aufgetragen, deren Gleichung

$$z = M\frac{J_c}{J}$$

lautet, wobei J das wirkliche, veränderlich angenommene und J_c ein beliebiges aber konstantes Querschnitts-Trägheitsmoment bedeuten. Fasst man diese Linie $A'D'B'$ als Belastungslinie eines einfachen Balkens $A'B'$ auf und zeichnet die zugehörige Momentenkurve $A'SB'$, so ist diese (nach Aufgabe 1) die Einflusslinie für die mit EJ_c multiplicirte Senkung des Punktes C. Wirken also auf den Balken AB (ausser den in A und B hervorgerufenen Auflagerkräften) die beiden Kräfte P und X, und misst man unter P die Ordinate η und unter X die Ordinate c, so ergiebt sich die Senkung δ des Punktes C:

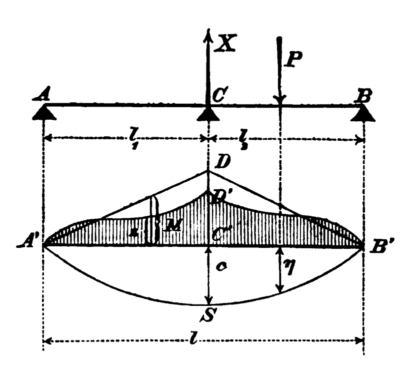


Fig. 163.

$$\delta = \frac{1}{EJ_c}(P\eta - Xc),$$

und es folgt aus der Bedingung $\delta = 0$ der Werth

$$X = P\frac{\eta}{c}.$$

Es ist mithin die Linie $A'SB'$ die gesuchte Einflusslinie für den Gegendruck X, und $\frac{1}{c}$ ist der Multiplikator für diese Linie.

Da es bei der Bestimmung von X nur auf das gegenseitige Verhältniss von η und c ankommt, so darf die Höhe des Dreiecks $A'DB'$

beliebig gross gewählt werden, und weiter darf die Linie $A'SB'$ ein mit beliebigem Polabstande gezeichnetes Seilpolygon sein.

Aufgabe 3. Gesucht sind die Einflusslinien für die Gegendrücke X' und X'' der Mittelstützen eines wagerechten kontinuirlichen Balkens mit veränderlichem Querschnitte und mit 4 gleich hohen Stützpunkten.

Werden die beiden Mittelstützen beseitigt, so entsteht ein einfacher Balken AD; die Punkte B und C desselben mögen sich um δ' und δ'' senken. Die Einflusslinie für den Werth $EJ_c\delta'$ (wobei J_c ein beliebiges Querschnitts-Trägheitsmoment bedeutet) stimmt mit der Momentenkurve $A'ND'$ eines einfachen Balkens $A'D'$ überein, dessen Belastungslinie $A'L'D'$ man erhält, wenn man den Balken AD im Punkte B mit der senkrechten Kraft „Eins" belastet, die dieser Belastung entsprechende Momentenfläche $A'LD'$ (Dreieck mit der Höhe $LB' = 1 \frac{l_1 r_1}{l}$) zeichnet und hierauf die Momente

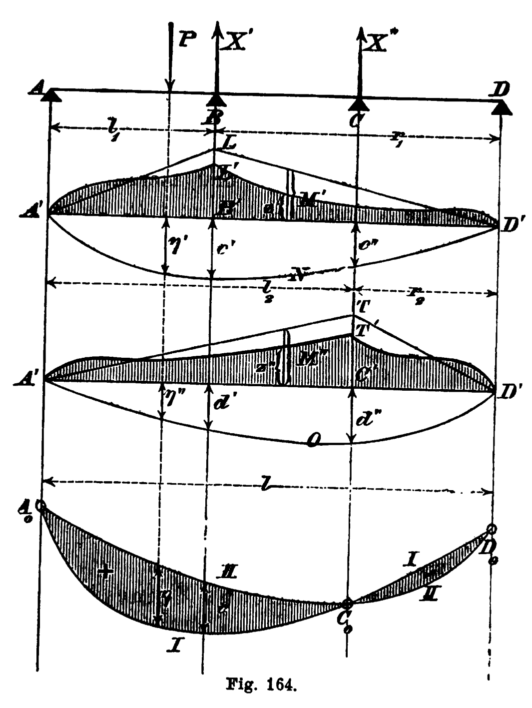


Fig. 164.

M' mit $\frac{J_c}{J}$ multiplicirt; man erhält die Belastungsordinaten $z' = M' \frac{J_c}{J}$.

In gleicher Weise wird die Einflusslinie $A'OD'$ für den Werth $EJ_c\delta''$ gefunden; es wird nach Auftragen des Dreiecks $A'TD'$, dessen Höhe $\overline{TC'} = 1 \frac{l_2 r_2}{l}$ ist, die Belastungslinie $A'T'D'$ mit der Gleichung $z'' = M'' \frac{J_c}{J}$ ermittelt und die zugehörige Momentenkurve $A'OD'$ gezeichnet.

Wirken nun auf den Balken AD (ausser den bei A und B hervorgerufenen Auflagerkräften) die drei senkrechten Kräfte P, X' und X'', so ergeben sich, mit den aus der Fig. 164 ersichtlichen Bezeichnungen, bei B und und C die Durchbiegungen

$$\delta' = \frac{1}{EJ_c}(P\eta' - X'c' - X''c'') \text{ und}$$

$$\delta'' = \frac{1}{EJ_c}(P\eta'' - X'd' - X''d''),$$

und es folgen aus den Bedingungen $\delta' = 0$ und $\delta'' = 0$ die beiden Gleichungen

$$X'c' + X''c'' = P\eta'$$
$$X'd' + X''d'' = P\eta'',$$

aus denen sich die folgende Konstruktion der Einflussfläche für X' ableiten lässt.*)

Man zeichne zu der Belastungslinie $A'L'D'$ mit beliebig gewähltem Polabstande ein Seilpolygon (I), welches die Senkrechten durch die Stützpunkte A, C, D in A_0, C_0, D_0 schneiden möge und hierauf zu der Belastungslinie $A'T'D'$ ein durch die 3 Punkte A_0, C_0 und D_0 gehendes Seilpolygon (II). Die Fläche zwischen den Seilpolygonen (I) und (II) ist die Einflussfläche für X'. Misst man unter P und X' beziehungsweise die Ordinaten η und c, so ist

$$X' = P\frac{\eta}{c}.$$

Die Höhen der Dreiecke $A'LD'$ und $A'TD'$, deren Ordinaten M′ und M″ mit $\frac{J_c}{J}$ multiplicirt die Belastungsordinaten z' und z'' liefern, dürfen, da es bei der Berechnung von X' nur auf das gegenseitige Verhältniss von η und c ankommt, beliebig gross gewählt werden.

Ganz ebenso wird die Einflussfläche für X'' gefunden.

Aufgabe 4. Gesucht ist der Horizontalschub X eines Bogenträgers mit 2 (an den Kämpfern gelegenen) Gelenken. Fig. 165. Es handele sich um den Einfluss einer über den Träger wandernden Last P, einer gleichmässigen Erwärmung und eines Nachgebens der Widerlager.

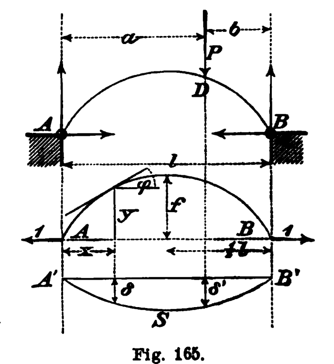


Fig. 165.

Zuerst wird angenommen, dass auf den Bogen nur zwei in A und B angreifende, nach aussen gerichtete, wagerechte Kräfte „Eins" wirken (Zustand $X = -1$). Die Sehnenlänge l vergrössert sich hierbei nach Gleich. 58a, Seite 150, um

$$\xi = \int_0^l \frac{y^2 ds}{EJ} + \int_0^l \frac{\cos\varphi\, dx}{EF},$$

*) Vergl. Seite 57.

und es entsteht eine Biegungslinie $A'SB'$, welche als die Momentenkurve eines einfachen Balkens $A'B'$ aufgefasst werden darf, dessen Belastungsordinate, nach Gleich. 62 und mit Vernachlässigung von N, stets genügend genau: $z = \frac{y \sec \varphi}{EJ}$ gesetzt werden darf; denn es ist $M = y \cdot 1$.

Mit Hilfe des Maxwell'schen Satzes lassen sich jetzt folgende Schlüsse ziehen, wobei δ' die unter der Last P gemessene Ordinate der Biegungslinie $A'SB'$ und D den Angriffspunkt von P bezeichnen möge.

1) Die in A und B wirksamen wagerechten Kräfte 1 verschieben den Punkt D um δ' nach abwärts, mithin wird eine in D angreifende Last „Eins" eine Vergrösserung der Stützweite l um δ' hervorbringen, und eine in D angreifende Last P wird $\Delta l = P\delta'$ erzeugen.
2) Der Horizontalschub X verursacht für sich allein $\Delta l = -X\xi$.
3) Eine gleichmässige Aenderung der Anfangstemperatur um t bedingt $\Delta l = \varepsilon t l$.
4) Soll sich bei gleichzeitigem Wirken von P und X sowie der Temperaturänderung die Stützweite l um einen vorgeschriebenen Werth Δl ändern, so besteht dre Bedingung
$$\Delta l = P\delta' - X\xi + \varepsilon t l,$$

und aus dieser ergiebt sich der für einen beliebig geformten Bogen giltige Werth

$$\text{(I)} \quad X = \frac{P\delta' + \varepsilon t l - \Delta l}{\xi}.$$

Für einen flachen Parabelbogen mit konstantem $EJ \cos \varphi$ ist, wenn $J \cos \varphi = J'$ gesetzt wird, nach Gleich. 58b, Seite 150,

$$\xi = \frac{8f^2 l}{15EJ'} + \frac{l}{EF'}$$

$$\text{und } z = \frac{y}{EJ} \sec \varphi = \frac{1}{EJ'} \cdot \frac{4fx(l-x)}{l^2}.$$

Die Differentialgleichung der Biegungslinie $A'SB'$ lautet

$$-\frac{d^2\delta}{dx^2} = z = \frac{4fx(l-x)}{EJ'\, l^2} \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{EJ'\, l^2}{4f} \frac{d^2\delta}{dx^2} = x^2 - lx;$$

ihre Integration liefert

$$\frac{EJ'\, l^2}{4f} \frac{d\delta}{dx} = \frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2} + C_1,$$

$$\frac{EJ' l^2}{4f} \delta = \frac{x^4}{12} - \frac{lx^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Aus den Bedingungen:

$$x = 0 \text{ muss liefern } \delta = 0$$
$$x = l \quad ,, \quad ,, \quad \delta = 0$$

ergeben sich die Integrationskonstanten

$$C_1 = \frac{l^3}{12} \text{ und } C_2 = 0$$

und es folgt die Gleichung

$$(75) \quad \delta = \frac{f(xl^3 - 2lx^3 + x^4)}{3EJ'l^2},$$

so dass unter der bei a gelegenen Last P die Ordinate

$$(76) \quad \delta' = \frac{f(al^3 - 2la^3 + a^4)}{3EJ'l^2}$$

erhalten wird. Die für X abgeleitete Gleichung I geht über in:

$$X = \frac{5P(al^3 - 2la^3 + a^4)}{8f_1 l^3} + \frac{15EJ'}{8ff_1 l}(\varepsilon tl - \Delta l)$$

wobei

$$f_1 = f\left(1 + \frac{15}{8}\frac{J'}{F'f^2}\right).$$

Das von P abhängige erste Glied von X bestimmt die Einflusslinie für X; diese Linie weicht so wenig von einer Parabel ab, dass es stets zulässig ist, sie durch eine Parabel zu ersetzen, so zwar dass beide Linien mit der Abscissenachse $A'B'$ (Fig. 165) gleich grosse Flächen einschliessen. Die Pfeilhöhe Z dieser Parabel bestimmt sich aus der Gleichung

$$\frac{Z2l}{3} = \frac{5P}{8f_1 l^3}\int_0^l (al^3 - 2la^3 + a^4);$$

man erhält

$$Z = \frac{3Pl}{16f_1}$$

und schliesslich den Einfluss von P auf X:

$$(77) \quad X = \frac{3Pab}{4f_1 l}.\text{*)}$$

Aufgabe 5. Ein ursprünglich wagerechter Stab konstanten Querschnitts liegt bei A frei auf und ist bei B unter dem Winkel τ_1 eingespannt. Es soll das durch eine senkrechte Einzellast P hervorgerufene Einspannungsmoment M_1 bestimmt werden. Fig. 166.

*) Eine andere Ableitung der Formel $X = \frac{3Pab}{4fl}$ findet sich bei Müller-Breslau, Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken, Berlin 1880, Seite 31.

Wir betrachten zunächst den bei A und B frei aufliegenden, nur durch ein in B angreifendes Kräftepaar, dessen Moment $= 1$ ist, belasteten Stab (Zustand $\mathrm{M}_1 = 1$) und berechnen die bei a entstehende Durchbiegung δ, sowie den Neigungswinkel τ der in B an die elastische Linie gelegten Tangente. Die Momentenfläche ist ein Dreieck ALB von der Höhe $\overline{LB} = 1$; fasst man sie als Belastungsfläche eines einfachen Balkens AB auf, so entstehen die Stützendrücke $(A) = \frac{1 \cdot l}{6}$ und $(B) = \frac{1 \cdot l}{3}$ und, an der Stelle a, das zweite Moment (vergl. Seite 165):

$$(\mathrm{M}) = \frac{l}{6} a - 1 \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3}$$

$$= \frac{a\,(l^2 - a^2)}{6l};$$

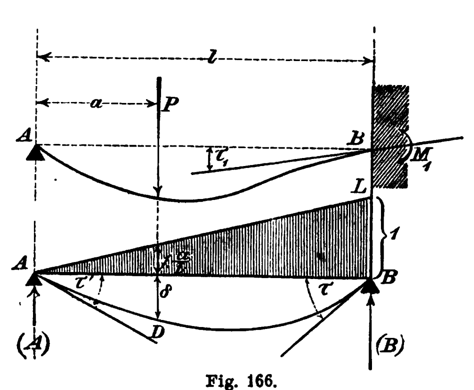


Fig. 166.

es ist mithin $$\delta = \frac{(\mathrm{M})}{EJ} = \frac{a\,(l^2 - a^2)}{6\,EJl}.$$

Weiter ergiebt sich

$$\tau = \frac{(B)}{EJ} = \frac{l}{3\,EJ}.\text{*)}$$

Der vierte der vorhin bewiesenen Sätze gestattet jetzt folgende Schlüsse:

Ein bei B angreifendes, links drehendes Kräftepaar „Eins" senkt den Punkt D um δ, folglich verursacht eine in D wirksame Last „Eins" bei B eine Links-Drehung δ, und eine Last P erzeugt die Drehung $P\delta$.

Da nun das Moment M_1 für sich allein die Drehung $\mathrm{M}_1\tau$ bewirkt, so entsteht im Ganzen die Drehung

$$\tau_1 = P\delta + \mathrm{M}_1\tau,$$

und es folgt hieraus, bei vorgeschriebenem τ_1, das gesuchte Einspannungsmoment:

$$\mathrm{M}_1 = -P\frac{\delta}{\tau} + \frac{\tau_1}{\tau} \quad \text{d. i.}$$

$$\mathrm{M}_1 = -\frac{Pa(l^2 - a^2)}{2l^2} + \frac{3\,EJ\tau_1}{l}.$$

---

*) Da $EJ\delta$ als Biegungsmoment aufgefasst werden darf, so lässt sich $EJ\tau = EJ\frac{d\delta}{dx}$ als Querkraft (Vertikalkraft) deuten. Es folgt dann (Fig. 166): $EJ\tau = (B)$ uud ebenso $EJ\tau' = (A)$.

§ 20.

Allgemeine Untersuchung des Einflusses einer Einzellast. auf die statisch nicht bestimmbaren Grössen X.

Wir betrachten ein Stabwerk, auf welches nur eine Last P wirkt, und suchen die statisch nicht bestimmbaren Grössen $X' \; X'' \ldots\ldots$ für eine beliebige Lage dieser Last unter der Annahme zu ermitteln, dass bezüglich der auf Biegungsfestigkeit in Anspruch genommenen Stäbe die Voraussetzungen des § 13 zutreffen.

Die Gleichungen:
$$L' = \int \frac{\sigma' \sigma d V}{E} + \int \varepsilon t \sigma' d V,$$
$$L'' = \int \frac{\sigma'' \sigma d V}{E} + \int \varepsilon t \sigma'' d V,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

welche auf Seite 73 für den Fall abgeleitet wurden, dass die Spannungen σ in der Form
$$\sigma = \sigma_0 + \sigma' X' + \sigma'' X'' + \ldots\ldots$$
darstellbar sind, lassen sich, wenn der die Unbekannten X enthaltende Theil von σ mit σ_x bezeichnet und
$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_x$$
gesetzt wird, schreiben:
$$(78)\quad \begin{cases} L' = \int \frac{\sigma' \sigma_0 d V}{E} + \int \frac{\sigma' \sigma_x d V}{E} + \int \varepsilon t \sigma' d V, \\ L'' = \int \frac{\sigma'' \sigma_0 d V}{E} + \int \frac{\sigma'' \sigma_x d V}{E} + \int \varepsilon t \sigma'' d V, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die von den Spannungen σ_0 abhängigen Integrale erstrecken sich über den statisch bestimmten Hauptträger, in welchen das betrachtete Stabwerk im Falle des Verschwindens sämmtlicher Unbekannten X übergeht; sie lassen sich in folgender Weise deuten:

Bezeichnet, für irgend einen Spannungszustand des Hauptträgers, δ die unter der Annahme unverrückbarer oder über reibungslose Lager gleitender Stützpunkte und für den Fall $t = 0$ bestimmte Verschiebung des Angriffspunktes von P, so besteht, da P die Spannungen σ_0 hervorbringt, zwischen δ und den Formänderungen $\Delta d s_v = \frac{\sigma}{E} d s_v$ die Beziehung (Arbeitsgleichung)
$$P \delta = \int \sigma_0 \frac{\Delta d s_v}{d s_v} d V = \int \frac{\sigma_0 \sigma d V}{E},$$
und es ergiebt sich insbesondere für die dem Zustande $X' = 1$ entsprechende Verschiebung δ' die Gleichung

$$(79)\begin{cases} P\delta' = \int \frac{\sigma_0 \sigma' d V}{E}, \\ \text{und ebenso folgt} \\ P\delta'' = \int \frac{\sigma_0 \sigma'' d V}{E},\ P\delta''' = \int \frac{\sigma_0 \sigma''' d V}{E},\ \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

wobei δ'', δ''', ... die bezieh. durch die Spannungen σ'', σ''', ... (entsprechend den Zuständen $X'' = 1$, $X''' = 1$, ...) hervorgebrachten Verschiebungen des Angriffspunktes von P bedeuten.

Die Bedingungsgleichungen (78) gehen jetzt über in:

$$(80)\begin{cases} L' = P\delta' + \int \frac{\sigma' \sigma_x d V}{E} + \int \varepsilon t \sigma' d V, \\ L'' = P\delta'' + \int \frac{\sigma'' \sigma_x d V}{E} + \int \varepsilon t \sigma'' d V, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

sie mögen für den Fall weiter umgeformt werden, dass für die auf Biegungsfestigkeit beanspruchten Stäbe die Spannungen σ nach Gleich. 40 (§ 14) berechnet werden dürfen, und die Temperaturänderung innerhalb eines Querschnittes dem in Fig. 75 dargestellten Gesetze folgt. Es ergiebt sich dann (vergl. die im § 15 unter 1 durchgeführten Integrationen):*)

$$\int \frac{\sigma' \sigma_x d V}{E} = \int \frac{N' N_x d s}{E F} + \int \frac{\mathrm{M}' \mathrm{M}_x d s}{E J} \quad \text{und}$$

$$\int \varepsilon t \sigma' d V = \int \varepsilon t_0 N' d s + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \mathrm{M}' d s;$$

dabei wird angenommen, dass die Längskraft N und das Biegungsmoment M durch die Gleichungen

$$N = N_0 + N' X' + N'' X'' + \ldots \quad \text{und}$$
$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}' X' + \mathrm{M}'' X'' + \ldots$$

gegeben sind und für die von X abhängigen Theile von N und M die Abkürzungen

$$N_x = N' X' + N'' X'' + \ldots$$
$$\mathrm{M}_x = \mathrm{M}' X' + \mathrm{M}'' X'' + \ldots$$

eingeführt werden.

Für die Fachwerkstäbe ist, wenn die Temperaturänderung in allen Punkten eines Stabes den gleichen Werth t annimmt,

$$\int \frac{\sigma' \sigma_x d V}{E} + \int \varepsilon t \sigma' d V = \Sigma \frac{S' S_x s}{E F} + \Sigma \varepsilon t S' s,$$

wobei die Spannkraft S in der Form

$$S = S_0 + S' X' + S'' X'' + \ldots$$

dargestellt sein muss und

---

*) Wir schreiben jetzt ds an Stelle von dx.

$$S_x = S'X' + S''X'' + \cdots\cdots$$

den von den Unbekannten X abhängigen Theil der Spannkraft S angiebt.

Die Gleichungen (80) gehen jetzt über in

$$(81) \begin{cases} L' = P\delta' + \int \frac{\mathrm{M}'\mathrm{M}_x ds}{EJ} + \int \frac{N'N_x ds}{EF} + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \mathrm{M}' ds \\ \quad + \int \varepsilon t_0 N' ds + \Sigma \frac{S'S_x s}{EF} + \Sigma \varepsilon t S' s, \\ L'' = P\delta'' + \int \frac{\mathrm{M}''\mathrm{M}_x ds}{EJ} + \int \frac{N''N_x ds}{EF} + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \mathrm{M}'' ds \\ \quad + \int \varepsilon t_0 N'' ds + \Sigma \frac{S''S_x s}{EF} + \Sigma \varepsilon t S'' s \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

sie ermöglichen u. A. die Berechnung der Einflusslinien für die Grössen X', X'', ... ebener Stabwerke auf die Ermittelung von Biegungslinien für stets sehr einfache Belastungsfälle zurückzuführen, da alle in den Gleichungen (81) stehenden Integrale von der Lage der Last P unabhängig sind und nur einmal berechnet zu werden brauchen.

Ist das Stabwerk nur einfach statisch unbestimmt, d. h. tritt nur eine Unbekannte X auf, so folgt

$$N = N_0 + N'X, \quad \mathrm{M} = \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}'X, \quad S = S_0 + S'X \text{ also}$$
$$N_x = N'X, \quad \mathrm{M}_x = \mathrm{M}'X, \quad S_x = S'X$$

und es ergiebt sich dann aus der ersten der Gleichungen (81) der Werth

$$(82) \quad X = \frac{L' - P\delta' - \int \varepsilon t_0 N' ds - \int \varepsilon \Delta t \frac{\mathrm{M}' ds}{h} - \Sigma S' \varepsilon t s}{\int \frac{N'^2 ds}{EF} + \int \frac{\mathrm{M}'^2 ds}{EJ} + \Sigma \frac{S'^2 s}{EF}}.$$

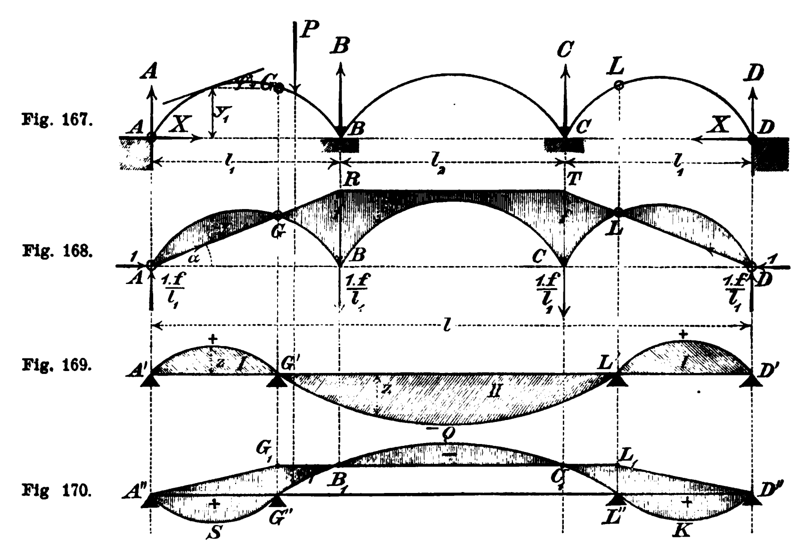
Aufgabe 1. Gesucht ist die Einflusslinie für den Horizontalschub X eines kontinuirlichen Bogenträgers mit 3 Oeffnungen. Fig. 167. Die einzelnen Bögen sind bei B und C starr miteinander verbunden; bei A und D, G und L sind Gelenke angeordnet. Ueber den Mittelpfeilern liegen wagerechte Gleitlager, weshalb die Gegendrücke B und C der Mittelstützen senkrecht wirken. Die Veränderlichkeit des Bogenquerschnittes soll berücksichtigt werden; sodann ist anzunehmen, dass der Bogen gleichmässig um t erwärmt wird, und, in Folge eines Nachgebens der Widerlager, l in $l + \Delta l$ übergeht, während sich die Mittelstützen um die sehr kleinen Strecken δ_1 und δ_2 senken.

Der Bogenträger ist einfach statisch unbestimmt; er geht im Falle $X = 0$ in einen Gerber'schen Balken über, für den sich die Biegungsmomente M_0 und Längskräfte N_0 leicht berechnen lassen.

Um die Unbekannte X mittelst der aus der Gleich. (82) folgenden Formel

$$\text{(I)}\quad X = \frac{L' - P\delta' - \varepsilon t \int N' ds}{\int \frac{N'^2 ds}{EF} + \int \frac{M'^2 ds}{EJ}} \text{*)}$$

bestimmen zu können, muss man zunächst den Zustand $X = 1$, welchem die Momente M' und Längskräfte N' entsprechen, untersuchen. Dieser



Zustand ist in Fig. 168 dargestellt. Ausser dem Horizontalschube „Eins" wirken noch senkrechte Auflagerkräfte $1 \cdot \frac{f}{l_1}$, denn es müssen, damit sich die Bogenstücke AG und LD nicht um die Gelenke G und L drehen, die Kämpferdrücke durch diese Gelenke gehen. Der Linienzug $ARTD$ ist (mit der Ausdrucksweise der graphischen Statik) das dem Zustande $X = 1$ entsprechende Mittelkraftspolygon, und es ergiebt sich für irgend einen Querschnitt des Bogenträgers das Biegungsmoment

$$M' = 1 \cdot y,$$

wobei y den senkrechten Abstand des Querschnitts-Schwerpunktes vom Mittelkraftspolygone bezeichnet. Die in Fig. 168 schraffirte Fläche ist somit die dem Zustande $X = 1$ entsprechende Momentenfläche; der mittlere Theil derselben ist positiv.

*) Da Fachwerkstäbe nicht vorkommen, so fallen die Glieder Σ in Gleich. 82 fort; ferner ist, wegen der hier vorausgesetzten gleichmässigen Erwärmung $\Delta t = 0$ und $t_0 = t$ zu setzen.

Ist φ der Neigungswinkel der Tangente an die Stabachse gegen die Wagerechte, so ist die Längskraft für den Querschnitt durch den Berührungspunkt:

1) innerhalb einer Aussenöffnung: $N' = -1 \cdot \cos\varphi - 1 \cdot \frac{f}{l_1} \sin\varphi$,
2) „ der Mittelöffnung: $N' = -1 \cdot \cos\varphi$.

Da nun das über eine Aussenöffnung ausgedehnte Integral $\int ds \sin\varphi = \int dy_1 = 0$ ist, weil B und A, desgl. C und D gleich hoch liegen, so folgt

$$\int N' ds = -\int \cos\varphi\, ds = -(l_1 + l_2 + l_1) = -l.$$

Die virtuelle Arbeit L' der Auflagerkräfte ist, für den Zustand $X = 1$ und bei den hier vorgeschriebenen Bewegungen der Stützpunkte:

$$L' = -1 \cdot \Delta l + 1 \cdot \frac{f}{l_1} \delta_1 + 1 \cdot \frac{f}{l_1} \delta_2$$

und es entsteht, wenn Zähler und Nenner des Werthes für X (Gleich. I) mit EJ_c multiplicirt werden (unter J_c ein beliebiges, kontantes Querschnitts-Trägheitsmoment verstanden) und die Bezeichnung

$$J \cos\varphi = J'$$

eingeführt wird:

$$X = \frac{-PEJ_c\delta' + EJ_c\left(\frac{f}{l_1}(\delta_1 + \delta_2) - \Delta l + \varepsilon t l\right)}{\mathfrak{N}},$$

wobei

$$\mathfrak{N} = J_c \int \frac{N'^2 ds}{F} + \int M'^2 \frac{J_c}{J'} dx = J_c \int \frac{N'^2 ds}{F} + \int y^2 \frac{J_c}{J'} dx.$$

Das erste Glied von $\mathfrak{N}$ ist gegen das zweite stets geringfügig, und es genügt, dasselbe angenähert zu berechnen. Man setze für alle drei Oeffnungen: $N' = -1 \cdot \cos\varphi$ und nehme für $F \sec\varphi$ einen konstanten Mittelwerth F_c an; es entsteht dann

$$J_c \int \frac{N'^2 ds}{F} = J_c \int \frac{dx}{F \sec\varphi} = \frac{J_c}{F_c} l \text{ und}$$

$$\mathfrak{N} = \frac{J_c}{F_c} l + \int y^2 \frac{J_c}{J'} dx.{}^{*)}$$

Nach Berechnung von $\mathfrak{N}$ braucht man, um X bestimmen zu können, nur noch δ' anzugeben.

Es bedeutet δ' die unter der Last P gemessene Ordinate der für

*) Wenn der Querschnitt nicht sehr stark veränderlich ist, ist es auch zulässig, für J' (wenigstens innerhalb der einzelnen Oeffnungen) einen konstanten Mittelwerth zu setzen.

den Zustand $X = 1$ gezeichneten Biegungslinie, deren Differentialgleichung

$$-\frac{d^2\delta'}{dx^2} = \frac{M'}{EJ}\sec\varphi + \frac{d\left(\frac{N'}{EF}\operatorname{tg}\varphi\right)}{dx}$$

unter Vernachlässigung des ganz unwesentlichen Gliedes $\frac{d\left(\frac{N'}{EF}\operatorname{tg}\varphi\right)}{dx}$ in

$$-\frac{d^2\delta'}{dx^2} = \frac{M'}{EJ'}$$

vereinfacht werden darf. Es folgt dann, wenn an Stelle der Linie mit der Ordinate δ' diejenige mit der Ordinate $EJ_c\delta' = \eta$ gesucht wird,

$$-\frac{d^2\eta}{dx^2} = M'\frac{J_c}{J'} = y\frac{J_c}{J'},$$

und es ergiebt sich nun im Anschlusse an die Entwickelungen des § 18 (wobei namentlich auf die Aufgabe unter 5 zu achten ist) die folgende Darstellung der η-Linie.

Man bestimmt die Belastungslinie $z = y\frac{J_c}{J'}$, wobei es sich empfiehlt (damit die Gleichung $-EJ_c\delta' = \eta$ bestehe), das Vorzeichen der y umzukehren und die y zwischen G und L negativ anzunehmen. Hierauf fasst man die in Fig. 169 mit I bezeichneten Flächen als Belastungsflächen einfacher Balken $A'G'$ und $L'D'$ auf, die mit II bezeichnete als Belastungsfläche eines einfachen Balkens $G'L'$ und zeichnet die zugehörigen Momentenkurven $A''SG''$, $G''QL''$ und $L''KD''$. Nachdem hierauf die Senkrechten durch die Stützpunkte B und C mit der Momentenkurve $G''QL''$ in B_1 und C_1 zum Schnitte gebracht worden sind, wird der Linienzug $A''G_1L_1D''$ eingetragen, dessen Eckpunkte G_1 und L_1 senkrecht unter den Gelenken liegen. Misst man nun unter der Last P den senkrechten Abstand der Momentenkurve von dem Linienzuge $A''G_1L_1D''$, so besteht zwischen η und δ' die Beziehung

$$-EJ_c\delta' = \eta$$

und es ergiebt sich der durch die Last P hervorgebrachte Horizontalschub

$$X = \frac{P\eta}{\mathfrak{N}}.$$

Sind die Momentenkurven $A''SG''$, $G''QL''$, $L''KD''$ Seilpolygone, und ist der Polabstand $= \mathfrak{N}$, so folgt

$$X = P\eta.$$

Es ist dann die Fläche zwischen den Seilpolygonen und dem Linienzuge $A''G_1L_1D''$ die Einflussfläche für X. Lasten zwischen B und C erzeugen ein negatives X.

Besonders empfehlenswerth für den vorliegenden Fall ist die auf Seite 158 gelehrte Einführung von Einzellasten an Stelle der Belastungsflächen I und II.

Vergl. auch Fig. 159. Wegen $M' = 1 \cdot y$ erhält man, wenn der Einfluss der Längskräfte N auf die Werthe η vernachlässigt wird, nach Gleich. (64) und (63) die im Knotenpunkte m anzunehmende Einzellast

$$w_m = \omega_m = \frac{1}{6}\left[\frac{J_c}{J'_m}\frac{\lambda_m}{\lambda_c}(y_{m-1} + 2y_m) + \frac{J_c}{J'_{m+1}}\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_c}(y_{m+1} + 2y_m)\right],$$

wobei λ_c eine beliebige konstante Feldweite vorstellt. Zeichnet man zu diesen Lasten w (welche zwischen G und L nach aufwärts, hingegen links von G und rechts von L nach abwärts wirkend anzunehmen sind) die einfachen Momentenkurven $A''SG''$, $G''QL''$ und $L''KD''$ (Fig. 170), trägt den Linienzug $A''G_1L_1D''$ ein und misst unter P die Ordinate η, so besteht die Beziehung $-\frac{EJ_c}{\lambda_c}\delta' = \eta$ und es folgt $X = \frac{P\eta\lambda_c}{\mathfrak{N}}$.

Nun ist

$$\int\frac{y^2 dx}{EJ'} = \int y\frac{M' dx}{EJ'} = \frac{\lambda_c}{EJ_c}\Sigma y_m \omega_m = \frac{\lambda_c}{EJ_c}\Sigma y_m w_m \text{ (nach Gleich. 68)}$$

und

$$\int y^2 \frac{J_c}{J'} dx = \lambda_c \Sigma y_m w_m,$$

mithin

$$\frac{\mathfrak{N}}{\lambda_c} = \frac{J_c l}{F_c \lambda_c} + \Sigma y_m w_m,$$

und man erhält, wenn a eine beliebig lange Strecke bedeutet,

$$X = \frac{P}{\mathfrak{H}}\frac{\eta}{a}, \text{ wobei } \mathfrak{H} = \frac{J_c l}{F_c \lambda_c a} + \frac{\Sigma y_m w_m}{a}.$$

Sind die Linien $A''SG''$, $G''QL''$, $L''KD''$ Seilpolygone, welche zu den Lasten w mit der Polentfernung $\mathfrak{H}$ gezeichnet wurden, so ist

$$X = P\frac{\eta}{a}$$

und, wenn die Lasteinheit P durch eine Strecke von der Länge a dargestellt wird (Kräftemaassstab):

$$X = \eta.$$

Zu beachten ist, dass sowohl die Polentfernung $\mathfrak{H}$ als auch die Lasten w „Strecken" vorstellen, welche in beliebigem (vom Längenmaassstabe der Zeichnung unabhängigen) Maassstabe aufgetragen werden dürfen. Meistens ist λ konstant; man wählt dann λ_c = wirkliche Feldweite und erhält $\frac{\lambda_m}{\lambda_c} = \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_c} = 1$. Ist ausserdem die Annahme: $J' = Konst.$ zulässig, so wählt man J_c gleich dem Mittelwerthe von J' und hat dann sehr einfach

$$w_m = \frac{1}{6}(y_{m-1} + 4y_m + y_{m+1}).$$

Bei kleiner Feldweite ist genügend genau $w_m = y_m$.

Aufgabe 2. Eine auf Pendelpfeilern ruhende Kette sei durch senkrechte Stäbe mit einem Bogen verbunden, welcher an den Kämpfern Gelenke besitzt. Auf den Bogen wirke eine Last P. Es soll der Horizontalzug X' der Kette und der Horizontalschub X'' des Bogens unter der Voraussetzung berechnet werden, dass sich die Stützpunkte um beobachtete kleine Strecken verschieben und eine gleichmässige Erhöhung der Anfangstemperatur um t stattfindet. Fig. 171.

Zunächst müssen die Spannkräfte in den Fachwerkstäben, sowie

die den Bogen beanspruchenden Biegungsmomente M und Längskräfte N durch die Last P und die Unbekannten X' und X'' ausgedrückt werden.

a) Die Fachwerkstäbe. Es ergiebt sich für irgend ein Glied

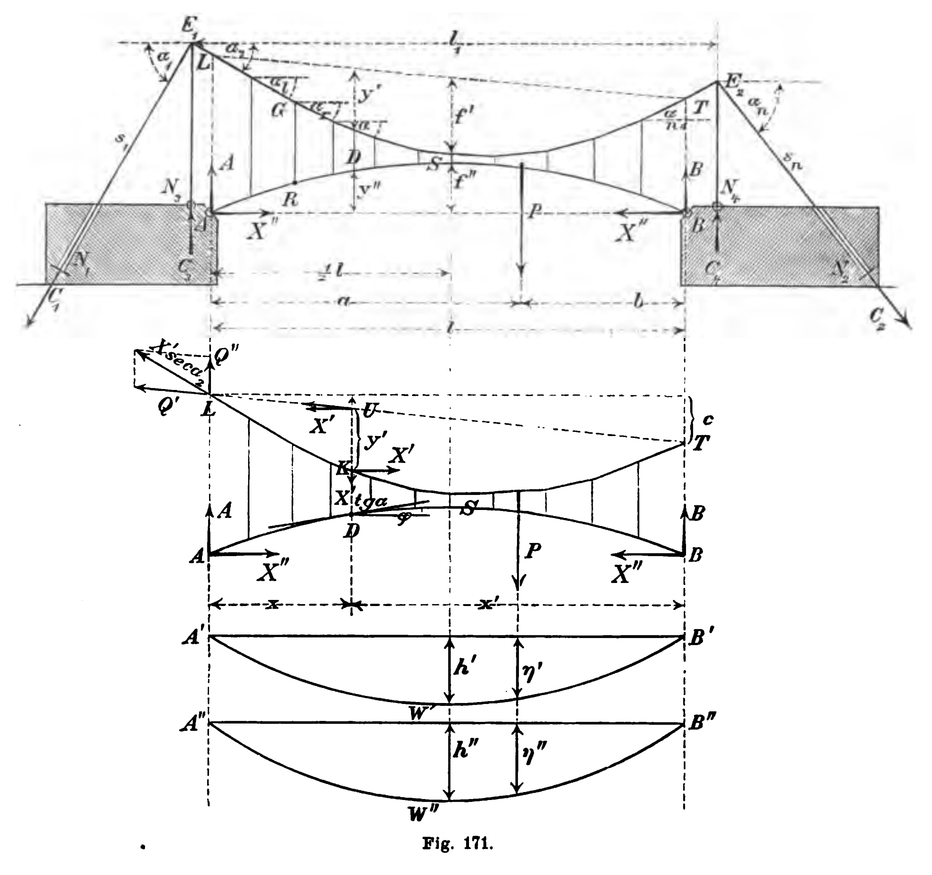


Fig. 171.

der Kette, wenn α den Neigungswinkel desselben gegen die Wagerechte bedeutet:

$$\text{(I)} \quad S = X' \sec \alpha$$

und für irgend eine Hängestange GR, wenn α_l und α_r die links und rechts von GR gelegenen Winkel α bedeuten:

$$\text{(II)} \quad S = X' (\operatorname{tg} \alpha_l - \operatorname{tg} \alpha_r).$$

Für den linken Pendelpfeiler ist

$$\text{(III)} \quad S = -X' (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2)$$

und für den rechten:

$$\text{(IIIa)} \quad S = -X' (\operatorname{tg} \alpha_{n-1} + \operatorname{tg} \alpha_n).$$

b) Der Bogen. Die senkrechten Auflagerdrücke bei A und B

seien $= A$ bezieh. $= B$; sie mögen die Kette in L und T schneiden. Die Gerade LT heisse die Schlusslinie, und es sei an der Stelle x der senkrechte Abstand der Kette von der Schlusslinie $= y'$ und die Ordinate des Bogen $= y''$. Bei L denken wir die Kette durchgeschnitten, zerlegen die Spannkraft $X' \sec \alpha_2$ des geschnittenen Kettengliedes in die Seitenkräfte Q' (in der Richtung der Schlusslinie) und Q'' (senkrecht) und schreiben die Momentengleichung für den Punkt T an; sie lautet

$$\text{(IV)} \quad (A + Q'')\, l - Pb = 0,$$

und liefert $A + Q'' = \frac{Pb}{l}$. Nun führen wir an der Stelle x einen senkrechten Schnitt, welcher Bogen, Kette und Schlusslinie in D, K und U trifft, verlegen Q' von L nach U, zerlegen sowohl Q' als auch die Spannkraft S des vom Schnitte DU getroffenen Kettengliedes in eine senkrechte und eine wagerechte Seitenkraft (welche letztere $= X'$ ist) und finden, wenn $x < a$ ist, das Biegungsmoment für den Bogenquerschnitt bei D:

$$\mathrm{M} = (A + Q'')\, x - X'y' - X''y'' \quad \text{d. i.}$$

$$\mathrm{M} = \frac{Pb}{l}\, x - X'y' - X''y'',$$

während im Falle $x > a$

$$\mathrm{M} = \frac{Pa}{l}\, x' - X'y' - X''y''$$

erhalten wird, weshalb allgemein gesetzt werden darf

$$\text{(V)} \quad \mathrm{M} = \mathrm{M}_0 - X'y' - X''y'',$$

wobei $\mathrm{M}_0 =$ Biegungsmoment für einen bei A und B frei aufliegenden, mit P belasteten Balken ASB.

Die Momentengleichung (IV) für den Punkt T lässt sich auch, nach der (in Fig. 171 nicht angegebenen) Zerlegung von $X' \sec \alpha_2$ in X' (wagerecht) und $X' \operatorname{tg} \alpha_2$ (senkrecht) in der Form schreiben:

$$(A + X' \operatorname{tg} \alpha_2)\, l - X'c - Pb = 0;$$

sie liefert dann den senkrechten Gegendruck des Bogenwiderlagers

$$\text{(VI)} \quad A = \frac{Pb}{l} - X'\left(\operatorname{tg} \alpha_2 - \frac{c}{l}\right),$$

und ebenso lässt sich ableiten

$$\text{(VII)} \quad B = \frac{Pa}{l} - X'\left(\operatorname{tg} \alpha_{n-1} + \frac{c}{l}\right),$$

wobei α_{n-1} den spitzen Neigungswinkel des vom Schnitte BT getroffenen Kettengliedes ist.

Die Summe der auf das Bogenstück AD wirkenden senkrechten Kräfte ist nun für $x < a$:

$$V = A + X' \operatorname{tg} \alpha_2 - X' \operatorname{tg} \alpha = \frac{Pb}{l} - X'\left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{c}{l}\right)$$

und für $x > a$

$$V = (A - P) + X' \operatorname{tg} \alpha_2 - X' \operatorname{tg} \alpha = -\frac{Pa}{l} - X'\left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{c}{l}\right),$$

weshalb man setzen darf

$$\text{(VIII)} \quad V = V_0 - X'\left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{c}{l}\right),$$

unter V_0 die Querkraft (Vertikalkraft) für den Querschnitt x eines einfachen Balkens AB verstanden.

Da die Summe der auf das Bogenstück AD wirkenden wagerechten Kräfte $= X''$ ist, so ergiebt sich nach Gl. (56) für den Bogenquerschnitt bei D die Längskraft

$$\text{(IX)} \quad N = -V_0 \sin \varphi + X'\left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{c}{l}\right) \sin \varphi - X'' \cos \varphi.$$

φ bedeutet den Neigungswinkel der in D an die Bogenachse gelegten Tangente gegen die Wagerechte.

Durch die abgeleiteten Gleichungen ist die Berechnung der Inanspruchnahme unseres Stabwerks auf diejenige von X' und X'' zurückgeführt.

c) **Bestimmung von X' und X''.** Es sollen die Gleichungen (81) benutzt werden; dieselben gehen, wegen $\Delta t = 0$, $t_0 = t$ und $S'' = 0$*), nach Multiplikation mit EJ_c**) und mit der Bezeichnung $J \cos \varphi = J'$ über in:

$$EJ_cL' = PEJ_c\delta' + \int \mathrm{M}'\mathrm{M}_x \frac{J_c}{J'}\, dx + J_c \int \frac{N'N_x ds}{F} + \varepsilon EJ_c t \int N' ds$$
$$+ J_c \Sigma \frac{S'S_x s}{F} + \varepsilon E t J_c \Sigma S' s$$

$$EJ_cL'' = PEJ_c\delta'' + \int \mathrm{M}''\mathrm{M}_x \frac{J_c}{J'}\, dx + J_c \int \frac{N''N_x}{F} ds + \varepsilon EJ_c t \int N'' ds,$$

und hierein ist zu setzen für den Bogen:

$$\mathrm{M}_x = -X'y' - X''y''; \quad N_x = +X'\left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{c}{l}\right) \sin \varphi - X'' \cos \varphi$$

$$\mathrm{M}' = -y'; \quad N' = \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{c}{l}\right) \sin \varphi \quad (\text{Zustand } X' = 1)$$

$$\mathrm{M}'' = -y''; \quad N'' = -\cos \varphi; \quad (\text{Zustand } X'' = 1)$$

und für sämmtliche Fachwerkstäbe:

$$S_x = S'X'.$$

wobei S' bez. den Koefficienten von X' in den Gleich. I bis III bedeutet.

*) In den für die Spannkräfte S gefundenen Ausdrücken ist die Unbekannte X'' nicht enthalten.

**) J_c bedeutet, wie früher, ein beliebiges, konstantes Trägheitsmoment.

Mit der stets zulässigen Vernachlässigung des fast einflusslosen Werthes N', sowie des ersten Gliedes des Ausdruckes für N_x, ergeben sich zur Berechnung von X' und X'' die Gleichungen:

$$
\text{(X)}\left\{\begin{aligned}
EJ_cL' &= PEJ_c\delta' + X'\int y'^2\frac{J}{J'}\,dx + X''\int y'y''\frac{J_c}{J}\,dx + J_cX'\Sigma\frac{S'^2_s}{F} \\
&\quad + \varepsilon EtJ_c\Sigma S's, \\
EJ_cL'' &= PEJ_c\delta'' + X'\int y'y''\frac{J_c}{J'}\,dx + X''\int y''^2\frac{J_c}{J'}\,dx + \frac{J_cX''}{F_c}\,l^{*)} \\
&\quad - \varepsilon EtJ_cl.
\end{aligned}\right.
$$

Die Summen Σ erstrecken sich über Kette, Hängestangen und Pendelpfeiler und die Integrale über den ganzen Bogen.

Um die virtuellen Arbeiten L' und L'' der Auflagerkräfte zu berechnen, nehmen wir die Wagerechte durch die Punkte A und B relativ festliegend an und bezeichnen die Verschiebungen der Stützpunkte N_1 und N_2 im Sinne von N_1E_1 bezieh. N_2E_2 mit ξ_1 und ξ_2, die Senkungen der Punkte N_3 und N_4 mit ξ_3 und ξ_4 und die Vergrösserung der Stützweite l mit Δl. Es ist dann die von den Stützendrücken

$$X'',\quad C_1 = X'\sec\alpha_1,\quad C_1 = X'\sec\alpha_n,$$
$$C_3 = X'(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2),\quad C_4 = X'(\operatorname{tg}\alpha_{n-1} + \operatorname{tg}\alpha_n)$$

geleistete virtuelle Arbeit:

$$\mathfrak{A} = -X''\Delta l - X'\sec\alpha_1\cdot\xi_1 - X'\sec\alpha_n\cdot\xi_2 - X'(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2)\,\xi_3$$
$$- X'(\operatorname{tg}\alpha_{n-1} + \operatorname{tg}\alpha_n)\,\xi_4$$

und es folgt für den Zustand $X' = 1$:

$$\text{(XI)}\quad L' = -\xi_1\sec\alpha_1 - \xi_2\sec\alpha_n - \xi_3(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2)$$
$$- \xi_4(\operatorname{tg}\alpha_{n-1} + \operatorname{tg}\alpha_n)$$

und für den Zustand $X'' = 1$

$$\text{(XII)}\quad L'' = -\Delta l.$$

δ' und δ'' sind die unter der Last P gemessenen Ordinaten der für die Zustände $X' = 1$ und $X'' = 1$ zu zeichnenden Biegungslinien eines bei A und B frei aufliegenden Balkens ASB (des Hauptträgers unseres Stabwerks); sie können mit Hilfe ihrer Differentialgleichungen:

$$
\text{(XIII)}\left\{\begin{aligned}
-\frac{d^2\delta'}{dx^2} &= \frac{M'}{EJ'} + \frac{d\left(\dfrac{N'}{EF}\operatorname{tg}\varphi\right)}{dx}, \\
-\frac{d^2\delta''}{dx^2} &= \frac{M''}{EJ'} + \frac{d\left(\dfrac{N''}{EF}\operatorname{tg}\varphi\right)}{dx}
\end{aligned}\right.
$$

*) Es bedeutet. wie in Aufgabe 1, F_c den konstanten Mittelwerth aus den veränderlichen Werthen $F\sec\varphi$, wobei F = Querschnitt des Bogens an der Stelle x.

berechnet oder nach der im § 18 gegebenen Anleitung auf graphischem Wege gefunden werden, während sich die in den Gleichungen (X) vorkommenden Integrale u. A. mittelst der Simpson'schen Formel ermitteln lassen.*)

Formeln für die durch einen Parabelbogen versteifte parabolische Kette. Sind f' und f'' die Werthe von y' und y'' bei $x = \frac{1}{2} l$, so ist

$$y' = \frac{4f'x(l-x)}{l^2} \text{ und } y'' = \frac{4f''x(l-x)}{l^2}$$

und es folgt, wenn $J' = J \cos \varphi$ durch einen konstanten Mittelwerth J_c ersetzt wird,

$$\text{(XIV)} \quad \begin{cases} \int y'^2 \frac{J_c}{J'} dx = \frac{16 f'^2}{l^4} \int_0^l x^2 (l-x)^2 = \frac{8f'^2 l}{15} \\ \int y''^2 \frac{J_c}{J'} dx = \frac{8f''^2 l}{15} \text{ und } \int y' y'' \frac{J_c}{J'} dx = \frac{8 f' f'' l}{15}. \end{cases}$$

Die Gleichungen XIII gehen, mit Vernachlässigung der unwesentlichen, von N' und N'' abhängigen Glieder, über in

$$-EJ_c \frac{d^2\delta'}{dx^2} = \text{M}' = -y' = -\frac{4f'x(l-x)}{l^2} \text{ und}$$

$$-EJ_c \frac{d^2\delta''}{dx^2} = -\frac{4f''x(l-x)}{l^2},$$

und es ergeben sich nach Gleich. (76) Seite 172 bei $x = a$ die Ordinaten

$$\delta' = -\frac{f'(al^3 - 2la^3 + a^4)}{3EJ_c l^2} \text{ und } \delta'' = -\frac{f''(al^3 - 2la^3 + a^4)}{3EJ_c l^2},$$

wofür nach Seite 172 stets gesetzt werden darf (Gleich. 77):

$$\text{(XV)} \quad \delta' = \frac{2f'ab}{5EJ_c} \text{ und } \delta'' = -\frac{2f''ab}{5EJ_c}.$$

Bei Berechnung der Summen $\Sigma \frac{S'^2 s}{F}$ und $\Sigma S's$ ist es stets zulässig, nur die Spannkräfte S' der Kette zu berücksichtigen; dieselben sind für die unter $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ geneigten Stäbe bezieh.

$$1 \cdot \sec \alpha_1, \; 1 \cdot \sec \alpha_2, \; \ldots\ldots, \; 1 \cdot \sec \alpha_n,$$

so dass sich, wenn der Querschnitt der Kette dem Gesetze

$$F = F_s \sec \alpha$$

folgt, wobei F_s = Querschnitt der Kette im Scheitel,

$$\Sigma \frac{S'^2 s}{F} = \Sigma \frac{S's}{F_s} = \frac{1}{F_s} \sum_1^n s \sec \alpha$$

---

*) In den Gleichungen XIII dürfen die von N' und N'' abhängigen Glieder stets vernachlässigt werden.

ergiebt, und hierfür darf bei Annahme einer von L bis T stetig gekrümmten Kette und wenn y den Abstand des bei x gelegenen Kettenpunktes von der Wagerechten durch L bezeichnet, gesetzt werden

$$\sum_1^n s \sec \alpha = s_1 \sec \alpha_1 + \int_0^l ds \sec \alpha + s_n \sec \alpha_n$$
$$= s_1 \sec \alpha_1 + s_n \sec \alpha_n + \int_0^l dx \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].\text{*)}$$

Bedeutet c den Höhenunterschied der Punkte L und T, so ist $y = y' + c\frac{x}{l} = \frac{4f'x(l-x)}{l^2} + c\frac{x}{l}$, und es folgt somit (nach Ausführung der Integration):

$$\text{(XVI)} \quad F_s \Sigma \frac{S_s'^2}{F} = \Sigma S's = \sum_1^n s \sec \alpha$$
$$= s_1 \sec \alpha_1 + s_n \sec \alpha_n + l\left(1 + \frac{16}{3}\frac{f'^2}{l^2} + \frac{c^2}{l^2}\right).$$

Werden die Werthe aus XIV, XV, XVI in X eingeführt und letztere Gleichungen nach X' und X'' aufgelöst, so ergeben sich mit den Bezeichnungen:

$$\text{(XVII)} \begin{cases} \mu = 1 + \frac{15}{8}\frac{J_c}{F_s f'^2}\frac{s_0}{l}; \quad \nu = 1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{J_c}{F_s f''^2}; \\ s_0 = s_1 \sec \alpha_1 + s_n \sec \alpha_n + l\left(1 + \frac{16}{3}\frac{f'^2}{l^2} + \frac{c^2}{l^2}\right) \end{cases}$$

folgende Ausdrücke für X' und X'':

Die Last P erzeugt:

$$\text{(XVIII)} \quad X' = \frac{3Pab}{4f'l}\frac{\nu - 1}{\mu\nu - 1} \text{ und } X'' = \frac{3Pab}{4f''l}\frac{\mu - 1}{\mu\nu - 1},$$

die gleichmässige Erwärmung verursacht:

$$\text{(XIX)} \begin{cases} X' = -\frac{15}{8}\frac{\varepsilon E t J_c}{f'l(\mu\nu - 1)}\left(\frac{s_0 \nu}{f'} + \frac{l}{f''}\right) \\ X'' = +\frac{15}{8}\frac{\varepsilon E t J_c}{f''l(\mu\nu - 1)}\left(\frac{s_0}{f'} + \frac{l}{f''}\mu\right) \end{cases}$$

und eine Verschiebung der Stützpunkte bringt hervor

$$\text{(XX)} \quad X' = \frac{15}{8}\frac{EJ_c}{f'^2 l}\frac{L'\nu - L''\frac{f'}{f''}}{\mu\nu - 1} \text{ und } X'' = \frac{15}{8}\frac{EJ_c}{f''^2 l}\frac{L''\mu - L'\frac{f''}{f'}}{\mu\nu - 1},$$

wobei L' und L'' durch die Gleich. XI und XII gegeben sind.

---

*) Es ist hierbei die Dehnung der Stücke $E_1 L$ und TE_2 der Kette vernachlässigt worden.

Trägt man die Parabeln $A'W'B'$ und $A''W''B''$ auf, deren Pfeilhöhen beziehungsweise

$$h' = \frac{3l}{16f'} \frac{\nu - 1}{\mu\nu - 1} \text{ und } h'' = \frac{3l}{16f''} \frac{\nu - 1}{\mu\nu - 1}$$

sind und bezeichnet die unter der Last P gemessenen Ordinaten dieser Parabeln mit η' und η'', so findet man, dass

$$X' = P\eta' \text{ und } X'' = P\eta''$$

gesetzt werden darf. Die Parabeln $AW'B$ und $AW''B$ sind demnach die gesuchten Einflusslinien für X' und X''.

Horizontalzug der durch einen Balken versteiften parabolischen Kette. Ordnet man bei A, Fig. 171, ein wagerechtes Gleitlager (das aber auch negative Stützenwiderstände aufzunehmen im Stande sein muss) an, so ist $X'' = 0$. Der Horizontalzug X' der Kette muss der Gleichung genügen (vergl. X):

$$\text{(XXI)} \quad EJ_cL' = PEJ_c\delta' + X'\int y'^2 \frac{J_c}{J'} dx + J_cX'\Sigma \frac{S'^2_s}{F} + EtJ_c\Sigma S's,$$

und aus dieser folgt mit den durch die Gleichungen XIV und XV gegebenen Werthen:

$$X' = \frac{3Pab}{4\omega f'l} - \frac{15}{8} \frac{\varepsilon EtJ_cs_0}{\omega f'^2 l} + \frac{15L'EJ_c}{8\omega f'^2 l},$$

wobei

$$\omega = 1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{J_c}{F_sf'^2} \frac{s_0}{l}$$

ist, während L' durch die Gleich. XI bestimmt ist.

Den durch die Last P hervorgerufenen Horizontalzug kann man auch setzen:

$$X' = P\eta',$$

wenn η' die unter P gemessene Ordinate einer Parabel $A'W'B'$ bedeutet, deren Pfeil $h' = \frac{3l}{16\omega f'}$ ist.

Kette mit Versteifungsbalken, deren Horizontalzug vom Versteifungsbalken aufgenommen wird. In Figur 172 ist eine Kettenbrücke mit drei Oeffnungen dargestellt worden. Die gelenkartig mit einander verbundenen Balken C_1A, AB und BC_2 besitzen nur ein einziges festes Auflager; die übrigen Auflager bewegen sich auf wagerechten Bahnen. Bei C_1 und C_2 sind die Rückhaltketten mit den äusseren Balken befestigt — eine zuerst von dem verstorbenen österreichischen Ingenieur Langer vorgeschlagene Anordnung, durch welche die mit gewissen Uebelständen verbundene Einführung der Rückhaltketten in das Widerlagermauerwerk vermieden wird.

Lasten, welche auf die äusseren Balken C_1A, BC_2 wirken, erzeugen $X' = 0$. Bei Berechnung der infolge Belastung des mittleren Balkens hervorgerufenen Horizontalzuges ist zu beachten, dass der Balken AB nicht nur durch die Momente

$$M = M_0 - X'y$$

sondern auch durch die für alle Querschnitte gleiche Längskraft $N = -X'$ beansprucht wird. Für die Balken C_1A und BC_2 ist bei ausschliesslicher Belastung der Mittelöffnung $M = 0$ und $N = -X'$. In der

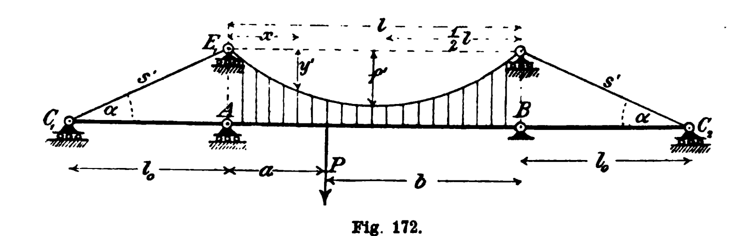


Fig. 172.

Gleich. XXI sind hiernach die auf die Kette sich beziehenden Summen $\Sigma \frac{S'^2 s}{F}$ und $\Sigma S's$ zu vermehren um die über die drei Balken F (deren Querschnitte bezieh. F_0, F, F_0 seien) sich erstreckenden Summen:

$$\int \frac{N'^2 dx}{F} = 1 \frac{l_0}{F_0} + 1 \frac{l}{F} + 1 \frac{l_0}{F_0} \text{ und}$$

$$\int N' ds = l_0 + l + l_0.$$

Man gelangt dann zu der Formel

$$X' = \frac{3Pab}{4\omega' f' l} - \frac{15}{8} \frac{\varepsilon E t J_c (s_0 + 2l_0 + l)}{\omega f'^2 l} + \frac{15 L' E J_c}{8 \omega f'^2 l}$$

wo

$$\omega = 1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{J_c}{f'^2 l} \left(\frac{s_0}{F_s} + \frac{2l_0}{F_0} + \frac{l}{F} \right)$$

ist.

§ 21.
Fortsetzung.

Zu einer besonders übersichtlichen Ermittlung der statisch nicht bestimmbaren Grössen, die jetzt mit X_a, X_b, X_c, ... bezeichnet werden sollen, gelangt man in der Weise, dass man die X zunächst zu den auf das statisch bestimmte Hauptsystem wirkenden Lasten rechnet

und die Wege δ_a, δ_b, δ_c, ... der Belastungen X_a, X_b, X_c, ... (nach Seite 53) auf die Form bringt:

$$(83)\quad \begin{cases} \delta_a = \Sigma P_m \delta_{am} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} - \cdots + \delta_{at} + \delta_{aw} \\ \delta_b = \Sigma P_m \delta_{bm} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} - \cdots + \delta_{bt} + \delta_{bw} \\ \delta_c = \Sigma P_m \delta_{cm} - X_a \delta_{ca} - X_b \delta_{cb} - X_c \delta_{cc} - \cdots + \delta_{ct} + \delta_{cw} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet:

δ_{am} den Einfluss der Ursache $P_m = 1$ auf den Weg δ_a
δ_{aa} „ „ „ „ $X_a = -1$ „ „ „ δ_a
δ_{ab} „ „ „ „ $X_b = -1$ „ „ „ δ_a
. . . .
δ_{at} desgl. den Einfluss von Temperaturänderungen
δ_{aw} „ „ „ „ Verschiebungen der Stützpunkte des Hauptsystems,

und ebenso lassen sich die übrigen mit Doppelzeigern behafteten Werthe δ deuten.

Da nun aber nach dem Maxwell'schen Satze die Buchstaben eines Doppelzeigers mit einander vertauschbar sind, so ist

$$\delta_{am} = \delta_{ma}, \quad \delta_{bm} = \delta_{mb}, \; \ldots\ldots$$

und es sind mithin die Beiwerthe der Belastungen P_m durch die den Ursachen $X_a = -1$, $X_b = -1$, ... entsprechenden Verschiebungszustände völlig bestimmt. Schreibt man die Arbeitsgleichung für den Belastungszustand $X_a = -1$ an und legt man hierbei jedem Theilchen ds_v die Aenderung $\Delta ds_v = 0$ bei, so erhält man

$$(84)\quad -1 \cdot \delta_{aw} + L_a = 0; \quad -1 \cdot \delta_{bw} + L_b = 0; \; \ldots\ldots$$

unter L_a, L_b, ... die virtuellen Arbeiten der Auflagerkräfte für den Zustand $X_a = -1$, bezw. $X_b = -1$, ... verstanden.

Es gehen also die Gleichungen (83) über in

$$(85)\quad \begin{cases} \delta_a - \delta_{at} - L_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} - \ldots \\ \delta_b - \delta_{bt} - L_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} - \ldots \\ \delta_c - \delta_{ct} - L_c = \Sigma P_m \delta_{mc} - X_a \delta_{ca} - X_b \delta_{cb} - X_c \delta_{cc} - \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

sie führen zu den Unbekannten X, nachdem die Wege δ_a, δ_b, δ_c, ... bestimmten Bedingungen unterworfen worden sind. Ist beispielsweise a der Angriffspunkt eines Auflagerwiderstandes X_a, und ist das fragliche Widerlager starr, so ist $\delta_a = 0$ zu setzen. Bedeutet X_b die Spannkraft in einem überzähligen Fachwerkstabe, so muss für δ_b die Längenänderung dieses Stabes eingeführt und positiv oder negativ angenommen werden, je nachdem der Stab gedehnt oder verkürzt wird.

Bevor wir zur Durchführung eines Beispiels übergehen, bemerken wir Folgendes:

Sollen die Gleich. 85 auf die Berechnung von statisch nicht bestimmbaren Auflagerkräften eines auf Biegung beanspruchten Stabes angewendet werden, so wird bei der Ermittelung der δ', δ'', ... die Gleichung der Biegungslinie stets in

$$-\frac{d^2\delta}{dx^2}=\frac{\mathrm{M}}{EJ'}$$

vereinfacht werden dürfen, wobei $J'=J\cos\varphi$ ist. Sobald die Annahme

$$EJ'=Const.,$$

erlaubt ist, was in der Regel der Fall sein wird, setze man bei der Ermittelung der Biegungslinien (δ', δ'', δ''' ....) den Werth $EJ'=1$, integrire also (auf analytischem oder graphischem Wege) Gleichungen von der Form

$$-\frac{d^2\delta}{dx^2}=\mathrm{M}.$$

Man muss dann die in den Bedingungen (85) auf der linken Seite stehenden Werthe $L_m-\varepsilon t\delta_{m\cdot t}$ mit EJ' multipliciren, desgl. den von Längskräften N abhängigen Theil der Verschiebungen $\delta_{m\cdot n}$, während der von den Biegungsmomenten abhängige Theil der $\delta_{m\cdot n}$ ebenfalls unter der Voraussetzung $EJ'=1$ berechnet wird.

Aufgabe. Gesucht sind die Stützenwiderstände eines durch eine senkrechte Kraft P belasteten Bogenträgers mit 3 Oeffnungen. Bei A und B sind Kämpfergelenke angeordnet; über den Mittelpfeilern sind die einzelnen Bögen fest mit einander verbunden und durch wagerechte Gleitlager unterstützt. EJ' sei konstant.

Es bedeuten A und B die senkrechten Seitenkräfte der Kämpferdrücke, X_1 den Horizontalschub, X_2 und X_3 die senkrechten Gegendrücke der Mittelstützen. Im Falle $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=0$ liegt ein an den Enden frei aufliegender Balken AB vor, und es nehmen dann A und B die Werthe

$$A_0=\frac{Pb}{l},\quad B_0=\frac{Pa}{l}$$

an. Wirken auf diesen (den Hauptträger unseres Stabwerks vorstellenden) einfachen Balken AB nur die wagerechten Kräfte $X_1=-1$, so ist das Biegungsmoment für irgend einen Querschnitt: $\mathrm{M}'=1\cdot y'$. Die Fläche zwischen der Bogenachse und der Geraden AB ist die Momentenfläche für den Zustand $X_1=-1$; sie sei kurz „Fläche I" genannt.

Die „Momentenfläche II" für den Zustand $X_2=-1$ ist ein Dreieck $A_2S_2B_2$ mit der Höhe $\overline{G_2S_2}=1\cdot\frac{l_2r_2}{l}$, und die Momentenfläche III"

für den Zustand $X_3 = -1$ ein Dreieck $A_3 S_3 B_3$ mit der Höhe $\overline{G_3 S_3} = 1 \cdot \frac{l_3 r_3}{l}$. Die Biegungsmomente M″ und M‴ für den beliebigen Querschnitt D sind

$$M'' = 1 \cdot y'' \text{ und } M''' = 1 \cdot y'''$$

und das gesammte Biegungsmoment für D wird

$$M = M_0 - X_1 y' - X_2 y'' - X_3 y''',$$

wobei (für den Hauptträger):

$$M_0 = \frac{Pb}{l} x, \text{ sobald } x < a$$

und

$$M_0 = \frac{Pa}{l} x', \text{ sobald } x' < b.$$

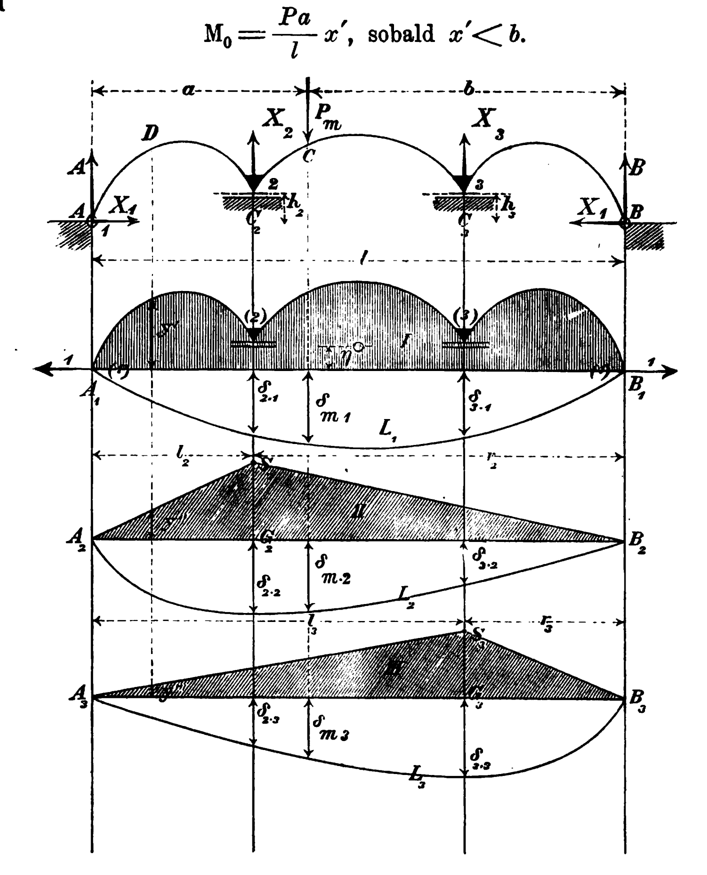


Fig. 173.

Fasst man die Fläche I als Belastungsfläche eines einfachen Balkens $A_1 B_1$ auf und zeichnet die zugehörige Momentenkurve $A_1 L_1 B_1$, so erhält man in dieser die dem Zustande $X_1 = -1$ und der Voraus-

setzung $EJ' = 1$ entsprechende Biegungslinie, ihre unter dem Angriffspunkte C von P_m und unter den Stützpunkten C_2 und C_3 gemessenen Ordinaten

$$\delta_{m1}, \quad \delta_{2\cdot 1}, \quad \delta_{3\cdot 1}$$

sind gleich den senkrechten Verschiebungen (Senkungen) der Punkte C, C_2 und C_3 für den Zustand $X_1 = -1$.

Ebenso bedeuten, wenn $A_2L_2B_2$ und $A_3L_3B_3$ die den Belastungsflächen II und III entsprechenden Momentenkurven der einfachen Balken A_2B_2 und A_3B_3 sind, die Ordinaten

$$\delta_{m2}, \quad \delta_{2\cdot 2}, \quad \delta_{3\cdot 2}$$
$$\delta_{m3}, \quad \delta_{2\cdot 3}, \quad \delta_{3\cdot 3}$$

die senkrechten Verschiebungen, welche die Punkte C, C_2, C_3 bei Eintreten der Zustände $X_2 = -1$ beziehw. $X_3 = -1$ erfahren.

Da die Verschiebungen δ_{m1}, δ_{m2}, δ_{m3} unter der Voraussetzung $EJ' = 1$ abgeleitet worden sind, und da ferner die Widerlager des statisch bestimmten Hauptsystems AB als starr angesehen wurden, so gehen die Gleichungen 85 für den vorliegenden Fall über in

$$X_1\delta_{1\cdot 1} + X_2\delta_{1\cdot 2} + X_3\delta_{1\cdot 3} = P_m\delta_{m\cdot 1} + (\delta_{1t} - \delta_1)\,EJ'$$
$$X_1\delta_{2\cdot 1} + X_2\delta_{2\cdot 2} + X_3\delta_{2\cdot 3} = P_m\delta_{m\cdot 2} + (\delta_{2t} - \delta_2)\,EJ'$$
$$X_1\delta_{3\cdot 1} + X_2\delta_{3\cdot 2} + X_3\delta_{3\cdot 3} = P_m\delta_{m3} + (\delta_{3t} - \delta_3)\,EJ'.$$

Die auf den linken Seiten stehenden Verschiebungen δ sind (da $\delta_{1\cdot 2} = \delta_{2\cdot 1}$ und $\delta_{1\cdot 3} = \delta_{3\cdot 1}$ ist) bereits bekannt bis auf $\delta_{1\cdot 1}$; letztere bedeutet die mit EJ' multiplicirte Verlängerung der Sehne l im Belastungsfalle $X_1 = -1$; dieselbe ist, nach Gleich. (58a) genügend genau

$$\delta_{1\cdot 1} = \int y'^2 dx + \frac{J'}{F'}\,l,$$

wobei F' den Mittelwerth von $F \sec\varphi$ und F den Inhalt des Bogenquerschnitts bedeutet*), während

$$\int y'^2 dx = 2\int (y'\,dx\,\frac{y'}{2} = 2F_1\cdot\eta$$

gesetzt werden darf, unter F_I den Inhalt der Belastungsfläche I und unter η den Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche von der Geraden A_1B_1 verstanden.

δ_{1t}, δ_{2t}, δ_{3t} sind die im entgegengesetzten Sinne von X_1, X_2, X_3 positiv angenommenen Verschiebungen der Stützpunkte in Folge einer Temperaturänderung. Wird eine gleichmässige Erwärmung um t vorausgesetzt, so bleibt der Bogen seiner früheren Gestalt ähnlich; es geht über:

$$l \text{ in } l + \varepsilon t l, \quad h_2 \text{ in } h_2 + \varepsilon t h_2, \quad h_3 \text{ in } h_3 + \varepsilon t h_3,$$

*) Bei flachen Bögen ist genügend genau $F' =$ dem Mittelwerthe von F.

und es ergiebt sich

$$\delta_{1 \cdot t} = \varepsilon t l, \quad \delta_{2 \cdot t} = - \varepsilon t h_2, \quad \delta_{3 \cdot t} = - \varepsilon t h_3.$$

Aendert sich in Folge von Verschiebungen der Widerlager:

$$l \text{ in } l + \Delta l, \quad h_2 \text{ in } h_2 + \Delta h_2, \quad h_3 \text{ in } h_3 + \Delta h_3,$$

so ist

$$\delta_1 = \Delta l, \quad \delta_2 = \Delta h_2, \quad \delta_3 = - \Delta h_3.$$

Nunmehr sind die sämmtlichen Konstanten der Gleichungen (I) bestimmt, und es lassen sich die Werthe X_1, X_2, X_3 berechnen.

Wir geben die Auflösung für den Fall eines in Bezug auf die Mittelsenkrechte symmetrischen Trägers, setzen:

$$\delta_{2 \cdot 1} = \delta_{3 \cdot 1} = c_1$$
$$\delta_{2 \cdot 2} = \delta_{3 \cdot 3} = c_2$$
$$\delta_{3 \cdot 2} = \delta_{2 \cdot 3} = c_3$$

führen für $\delta_{1 \cdot 1}$ die Bezeichnung c ein und erhalten mit den Abkürzungen:

$$\alpha' = \frac{1}{c - 2 \dfrac{c_1^2}{c_2 + c_3}}, \quad \alpha'' = \frac{c_2}{c_2^2 - c_3^2}, \quad \alpha''' = \frac{c_3}{c_2^2 - c_3^2}$$

die Auflagerkräfte:

$$X_1 = \alpha' P_m \left[\delta_{m1} - (\delta_{m2} + \delta_{m3}) \frac{c_1}{c_2 + c_3}\right] + \alpha' \varepsilon E J' t \left[l + 2 h_2 \frac{c_1}{c_2 + c_3}\right]$$
$$- \alpha' E J' \left[\Delta l + (\Delta h_2 + \Delta h_3) \frac{c_1}{c_2 + c_3}\right],$$

$$X_2 = P_m (\alpha'' \delta_{m2} - \alpha''' \delta_{m3}) - \varepsilon E J' t \frac{h_2}{c_2 + c_3}$$
$$+ E J' (\alpha'' \Delta h_2 + \alpha''' \Delta h_3) - X' \frac{c_1}{c_2 + c_3},$$

$$X_3 = P_m (\alpha'' \delta_{m3} - \alpha''' \delta_{m2}) - \varepsilon E J' t \frac{h_2}{c_2 + c_3}$$
$$+ E J' (\alpha'' \Delta h_3 + \alpha''' \Delta h_2) - X' \frac{c_1}{c_2 + c_3}.$$

Wird das eine der beiden festen Auflager A und B durch ein wagerechtes Gleitlager ersetzt, so ist $X_1 = 0$; es entsteht ein kontinuirlicher Balken, dessen Mittelstützen die Gegendrücke

$$X_2 = P_m (\alpha'' \delta_{m2} - \alpha''' \delta_{m3}) - \varepsilon E J' t (\alpha'' h_2 - \alpha''' h_3)$$
$$+ E J' (\alpha'' \Delta h_2 + \alpha''' \Delta h_3),$$
$$X_3 = P_m (\alpha'' \delta_{m3} - \alpha''' \delta_{m2}) - \varepsilon E J' t (\alpha'' h_3 - \alpha''' h_2)$$
$$+ E J' (\alpha'' \Delta h_3 + \alpha''' \Delta h_2)$$

ausüben.

Wird bei Lösung der vorstehenden Aufgabe eine Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Querschnittes verlangt, so hat man nur nöthig,

die Belastungsordinaten y', y'', y''' der einfachen Balken A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 durch die Ordinaten $y'\frac{J_c}{J'}$, $y''\frac{J_c}{J'}$, $y'''\frac{J_c}{J'}$ zu ersetzen, wobei J_c ein beliebiges konstantes Querschnittsträgheitsmoment bedeutet. In den Gleich. (I) muss dann J_c an die Stelle von J' treten, und schliesslich ist

$$\delta_{1\cdot 1} = \int y^2 \frac{J_c}{J'}\, dx + \frac{J_c}{F'}\, l$$

zu setzen.*)

§ 22.

Schärfere Untersuchung einfach gekrümmter Stäbe.

1) Grundgleichungen für die Spannungen und Formänderungen. Es wird, wie bei der bisherigen Untersuchung eines krummen Stabes angenommen, dass dieser in Bezug auf die durch seine Mittellinie gelegte Ebene symmetrisch ist, dass alle äusseren Kräfte in jener Ebene liegen, und nur die senkrecht zum Querschnitte wirkenden Spannungen σ berücksichtigt zu werden brauchen. Hingegen wird die Voraussetzung von im Verhältniss zu den Krümmungshalbmessern verschwindenden Querschnittsabmessungen aufgegeben.

Indem der Querschnitt auf zwei durch seinen Schwerpunkt gehende Koordinaten-Achsen (u und v) bezogen wird, deren eine (die u-Achse) senkrecht zur Stabebene ist, wird angenommen, dass in allen von der u-Achse gleichweit abgelegenen Querschnittstheilchen gleich grosse Spannungen σ und Temperaturänderungen t entstehen, und die Berechnung der σ an die Voraussetzung geknüpft, dass die vor der Biegung ebenen Querschnitte auch nach der Biegung Ebenen bleiben.**)

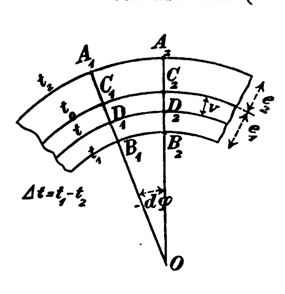


Fig. 174.

Sind in Fig. 174: A_1B_1 und A_2B_2 zwei unendlich nahe Querschnitte, $C_1C_2 = ds$ das Element der Stabachse, $C_1D_1 = C_2D_2 = +v$, $D_1D_2 = ds_v$ und $\angle A_1OA_2 = (-d\varphi)$, wobei φ den Winkel bedeutet,

---

*) Weiteres über kontinuirliche Bogenträger enthält eine Abhandlung des Verfassers im „Wochenblatte für Architekten und Ingenieure, 1884".

**) Man kann hierfür auch die Annahme machen, dass zwei unendlich nahe Querschnitte in Folge der Biegung gleich gekrümmt werden und die Stabachse unter gleichen Winkeln schneiden.

den die im Punkte C_1 an die Stabachse gelegte Tangente mit der x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 152) bildet, so ist vor Eintreten einer Verbiegung des Stabes, wenn r den Krümmungshalbmesser der Stabachse bezeichnet,

$$C_1C_2 = ds = -r\,d\varphi;\; D_1D_2 = ds_v = -(r-v)\,d\varphi = ds + v\,d\varphi$$

und nach einer kleinen Verbiegung

$$C_1C_2 = ds + \Delta ds,\; \angle A_1OA_2 = -(d\varphi + \Delta d\varphi),$$

$$D_1D_2 = ds_v + \Delta ds_v = ds + \Delta ds + (v + \Delta v)(d\varphi + \Delta d\varphi),$$

woraus, mit Vernachlässigung der sehr kleinen Grösse $\Delta v \Delta d\varphi$ und mit Beachtung von $ds = ds_v - v\,d\varphi$:

$$(86)\quad \Delta ds_v = \Delta ds + \Delta v\,d\varphi + v\,\Delta d\varphi,$$

während andererseits entsteht

in Folge der Spannung σ: $\Delta ds_v = \frac{\sigma}{E}\,ds_v$,

„ „ „ Temperaturänderung t: $\Delta ds_v = \varepsilon t\,ds_v$

und beim Zusammenwirken von σ und t:

$$(87)\quad \Delta ds_v = \left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon t\right) ds_v,$$

so dass sich ergiebt:

$$\frac{\sigma}{E} + \varepsilon t = \frac{\Delta ds + \Delta v\,d\varphi + v\,\Delta d\varphi}{ds + v\,d\varphi}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner der rechten Seite dieser Gleichung durch $\frac{ds}{r} = -d\varphi$, so erhält man

$$(88)\quad \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t = \frac{\frac{\Delta ds}{ds}\,r - \Delta v - \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\,v}{r - v},$$

worein zu setzen

$$(89)\quad \Delta v = \int_0^v \Delta dv = \int_0^v \left(\varepsilon t - \frac{\sigma}{mE}\right) dv,$$

unter $\frac{1}{m}$ den Koefficienten der Querdehnung verstanden; derselbe ist für Schweisseisen und Flusseisen $= \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$.

Differentiirt man (88), um das Integral Δv zu beseitigen, so gelangt man zu einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den 3 Veränderlichen σ, v, t und ist dann im Stande, σ als Funktion von v darzustellen, sobald t als Funktion von v gegeben ist. Die beiden

in σ noch enthaltenen Unbekannten $\frac{\Delta ds}{ds}$ und $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$ können schliesslich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen

$$N = \int \sigma dF, \quad \mathrm{M} = \int \sigma v dF$$

berechnet werden, unter N die Längskraft und unter M das Biegungsmoment für den fraglichen Querschnitt verstanden.

Wir wollen zunächst (vorbehaltlich einer späteren genaueren Untersuchung) den von σ abhängigen Theil von Δv vernachlässigen und $\Delta dv = \varepsilon t dv$ setzen; sodann wollen wir, ebenso wie beim geraden Stabe, nur solche Temperaturzustände in Betracht ziehen, welche keinen unmittelbaren Einfluss auf die Spannungen σ haben.

Beim geraden Stabe wurde gezeigt, dass mit den äusseren Kräften (P und C) auch die Spannungen σ verschwinden, sobald t eine Funktion ersten Grades der Querschnittskoordinaten u und v ist; es können dann durch Temperaturänderungen zwar beachtenswerthe Formänderungen, aber nur im Falle statischer Unbestimmtheit Spannungen hervorgerufen werden, sobald nämlich in Folge jener Temperaturänderungen äussere Kräfte entstehen.

Es fragt sich nun:

> Welchem Gesetze $t = F(v)$ muss die Temperaturänderung innerhalb des Querschnittes eines krummen Stabes folgen, damit auch für diesen mit den äusseren Kräften die Spannungen verschwinden.

Wir gehen von der Gleichung

$$\Delta ds_v = \Delta ds + \Delta v d\varphi + v \Delta d\varphi$$

aus, bezeichnen mit

t die Temperaturänderung an beliebiger Stelle v,
t_0 „ „ für $v = 0$,
t_1 „ „ „ $v = +e_1$,
t_2 „ „ „ $v = -e_2$

setzen, da auf den Stab keine äusseren Kräfte wirken sollen und $\sigma = 0$ sein soll,

$$\Delta ds_v = \varepsilon t ds_v = -\varepsilon t (r - v) d\varphi$$
$$\Delta ds = \varepsilon t_0 ds = -\varepsilon t_0 r d\varphi$$

und erhalten die Bedingung

$$-\varepsilon t (r - v) = -\varepsilon t_0 r + \Delta v + v \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}.$$

Wird diese Gleichung differentiirt, so entsteht, mit $\Delta ds = \varepsilon t dv$:

$$(90) \qquad -\varepsilon (r - v) dt = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} dv$$

und hieraus folgt:

$$t = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\int\frac{dv}{r-v} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\, ln\,(r-v) + C.$$

Da nun für $v = 0$: $t = t_0$ ist, so ergiebt sich

$$C = t_0 - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\, lnr \text{ und}$$

$$t = t_0 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\, ln\left(1 - \frac{v}{r}\right).$$

Setzt man erst $v = -e_2$ und $t = t_2$, hierauf $v = +e_1$ und $t = t_1$, so findet man

$$t_2 = t_0 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\, ln\left(1 + \frac{e_2}{r}\right),$$

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\, ln\left(1 - \frac{e_1}{r}\right) \text{ und}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\, ln\left(\frac{1 + \frac{e_2}{r}}{1 - \frac{e_1}{r}}\right),$$

woraus sich mit der schon früher benutzten Bezeichnung $t_1 - t_2 = \Delta t$ ergiebt:

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon\Delta t}{ln\left(\frac{r+e_2}{r-e_1}\right)}$$

und hierfür darf, mit $e_1 + e_2 = h$, stets genügend genau gesetzt werden:

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = -\varepsilon\Delta t\frac{r}{h},$$

so dass schliesslich folgt

$$(91)\quad t = t_1 - \Delta t\frac{r}{h}\, ln\left(1 - \frac{v}{r}\right).$$

Im Falle $r = \infty$ entsteht, wegen $ln\left(1 - \frac{v}{r}\right) = -\frac{v}{r}$

$$(92)\quad t = t_1 + \Delta t\frac{v}{h},$$

d. i. die früher vorausgesetzte geradlinige Funktion.

In der Regel werden die Ergebnisse von (91) und (92) nur wenig von einander abweichen.

Indem wir in der Folge annehmen, dass sich t nach dem durch die Gleichung 91 dargestellten Gesetze ändert, setzen wir:

$$(93)\quad \Delta ds = \varepsilon t_0 ds \textit{ und (angenähert):}$$

$$(94) \quad \Delta d\varphi = -\varepsilon \Delta t \frac{r}{h} d\varphi = +\varepsilon \Delta t \frac{ds}{h}.^{*)}$$

Um nun die durch äussere Kräfte erzeugten σ, Δds und $\Delta d\varphi$ zu ermitteln, setzen wir, indem wir $t = 0$ und mithin auch $\Delta v = 0$ annehmen,

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\frac{\Delta ds}{ds} r - \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} v}{r - v} = \frac{\Delta ds}{ds} - \left(\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds}\right) \frac{v}{r - v},$$

führen diesen Werth in die Gleichgewichtsbedingungen ein und erhalten die Beziehungen

$$\frac{N}{E} = \frac{\Delta ds}{ds} \int dF - \left(\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds}\right) \int \frac{v dF}{r - v},$$

$$\frac{M}{E} = \frac{\Delta ds}{ds} \int v dF - \left(\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds}\right) \int \frac{v^2 dF}{r - v}.$$

Aus diesen ergeben sich, wenn

$$(95) \quad \int v^2 \frac{r}{r - v} dF = Z$$

gesetzt wird, mit Hilfe der Integralwerthe:

$$\int dF = F, \int v dF = 0, \int \frac{v dF}{r - v} = \int \left(\frac{v}{r} + \frac{v^2}{r^2} \frac{r}{r - v}\right) dF = \frac{Z}{r^2}$$

die Ausdrücke:

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} = -\frac{Mr}{EZ}; \quad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF} - \frac{M}{EFr}$$

und es folgt mithin

$$(96) \quad \sigma = \frac{\mathfrak{N}}{F} + \frac{Mv}{Z} \frac{r}{r - v}$$

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\mathfrak{N}}{EF}$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{\mathfrak{N}}{EF} - \frac{Mr}{EZ}, \text{ wobei}$$

$$\mathfrak{N} = N - \frac{M}{r}.$$

Fügt man zu Δds und $\Delta d\varphi$ die vorhin gefundenen, unmittelbar von t_0 und Δt abhängigen Werthe, so erhält man für den vorhin erklärten Temperaturzustand:

---

*) Bei der Berechnung ungleichmässig erwärmter Bogenträger ist die Näherungsformel schon deshalb am Platze, weil das Gesetz, welchem t folgt, sich nie scharf angeben lässt.

$$(97) \quad \Delta ds = \frac{\mathfrak{N} ds}{EF} + \varepsilon t_0 ds,$$

$$(98) \quad \Delta d\varphi = -\frac{\mathfrak{N} ds}{EFr} + \frac{M ds}{EZ} + \varepsilon \Delta t \frac{ds}{h}.$$

Im Falle $r = \infty$ ist

$$\frac{r}{r - v} = 1, \; Z = \int v^2 dF = J, \; \mathfrak{N} = N, \; \sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J}$$

$$\Delta ds = \frac{N ds}{EF} + \varepsilon t_0 ds, \; \Delta d\varphi = \frac{M ds}{EJ} + \varepsilon \Delta t \frac{ds}{h},$$

es entstehen die früher für den geraden Stab abgeleiteten Gleichungen, welche auch dann noch anwendbar sind, wenn zwar r einen endlichen, aber, verglichen mit dem grössten v, sehr grossen Werth besitzt.

2) Reihenentwickelung von Z. Setzt man

$$\frac{r}{r - v} = 1 + \frac{v}{r} + \frac{v^2}{r^2} + \frac{v^3}{r^3} + \ldots\ldots,$$

so erhält man

$$Z = J + \frac{1}{r}\int v^3 dF + \frac{1}{r^2}\int v^4 dF + \frac{1}{r^3}\int v^5 dF + \ldots.$$

und für den Fall eines bezüglich der u-Achse symmetrischen Querschnittes:

$$Z = J + \frac{1}{r^2}\int v^4 dF + \frac{1}{r^4}\int v^6 dF + \ldots\ldots$$

Für das Rechteck von der Breite b und der Höhe h ergiebt sich mit $dF = b dv$ und $J = \frac{bh^3}{12}$:

$$\int v^4 dF = 2b \int_0^{\frac{1}{2}h} v^4 dv = \frac{bh^5}{5 \cdot 2^4} = \frac{3}{5}\,\frac{Jh^2}{2^2}$$

$$\int v^6 dF = 2b \int_0^{\frac{1}{2}h} v^6 dv = \frac{bh^7}{7 \cdot 2^6} = \frac{3Jh^4}{7 \cdot 2^4} \text{ u. s. w.}$$

$$(99) \quad Z = J\left[1 + \frac{3}{5}\left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \frac{3}{7}\left(\frac{h}{2r}\right)^4 + \frac{3}{9}\left(\frac{h}{2r}\right)^6 + \ldots\right].$$

Im Falle $r = 5h$ wird z. B. $Z = 1{,}006 J$, und es leuchtet ein, dass bei der Berechnung der im Brückenbau und Hochbau vorkommenden Bogenträger stets $Z = J$ gesetzt werden darf.

Für einen Kreisquerschnitt vom Halbmesser e ergiebt sich in ähnlicher Weise

$$(100) \quad Z = J\left[1 + \frac{3}{6}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{10}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \ldots\right].$$

3) Arbeitsbedingungen. Berechnung statisch nicht bestimmbarer Grössen. Für die Folge sollen nur solche auf ein festes Koordinatensystem bezogene Verrückungen δ und Δc der Angriffspunkte der äusseren Kräfte P und C in Betracht gezogen werden, welche durch Aenderungen der die Gestalt der Stabachse bestimmenden Werthe ds und $d\varphi$ bedingt sind. Man hat sich also entweder sämmtliche äusseren Kräfte in Punkten der Stabachse angreifend zu denken (wie dies in der Regel geschieht) oder man muss eine starre Verbindung ihrer Angriffspunkte mit der Stabachse voraussetzen.

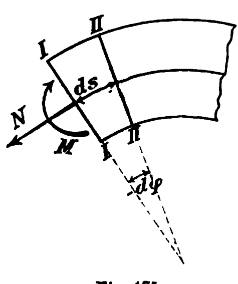


Fig. 175.

Um zu einem sehr übersichtlichen Ausdrucke für die virtuelle Formänderungs-Arbeit zu gelangen, denken wir uns durch zwei unendlich nahe Querschnitte I und II (Fig. 175) ein plattenförmiges Stabstück abgegrenzt und ersetzen die Spannungen σ eines jeden Querschnittes durch die im Querschnittsschwerpunkte angreifende Längskraft $N = \int \sigma dF$ und ein Kräftepaar mit dem Momente $M = \int \sigma v dF$. Letzteres ist für den Querschnitt I rechts drehend. Verschiebt sich nun, bei relativ festliegendem Querschnitte II, der Querschnitt I im Sinne von N um Δds, so leistet N die virtuelle Arbeit $N\Delta ds$, während bei der hierauf vorgenommenen Drehung des Querschnittes um den Winkel $\Delta(-d\varphi)$ das Kräftepaar die Arbeit $-\mathrm{M}\Delta(-d\varphi)$ verrichtet, wobei das erste Minuszeichen nöthig ist, weil $\Delta(-d\varphi)$ die Vergrösserung des ursprünglich von den beiden Querschnitten gebildeten Winkels $(-d\varphi)$ vorstellt, mithin der Sinn der Querschnittsdrehung demjenigen des Kräftepaares entgegengesetzt ist. Die virtuelle Formänderungs-Arbeit ist für die betrachtete Platte

$$dA_v = N\Delta ds + \mathrm{M}\Delta d\varphi$$

und für den ganzen Stab:

$$A_v = \int N\Delta ds + \int \mathrm{M}\Delta d\varphi.$$

Die Arbeitsgleichung, welche ausdrückt, dass die von den äusseren Kräften P und C geleistete virtuelle Arbeit gleich der virtuellen Formänderungs-Arbeit ist, lautet

$$(101) \qquad \Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c = \int N\Delta ds + \int \mathrm{M}\Delta d\varphi;$$

sie gilt für beliebige mögliche, verschwindend kleine Verschiebungen und möge zunächst mit der im § 13 entwickelten Arbeitsbedingung verglichen werden. Dazu führen wir ein:

$$N = \int \sigma dF \text{ und } M = \int \sigma v dF,$$

erhalten

$$\Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c = \iint \sigma dF (\Delta ds + v \Delta d\varphi)$$

und setzen, indem wir die durch irgend einen, mittels des Zeigers a gekennzeichneten Belastungszustand sowie durch Temperaturänderungen hervorgerufenen Verschiebungen δ_a, Δc_a, Δds_a, $\Delta d\varphi_a$ einführen, nach den Gleich. (86) und (87):

$$dF(\Delta ds_a + v\Delta d\varphi_a) = \frac{dV}{ds_v}[\Delta ds_{v.a} - \Delta v d\varphi] = dV\left[\frac{\Delta ds_{v.a}}{ds_v} + \frac{\Delta v}{r - v}\right]$$

$$= dV\left[\frac{\sigma_a}{E} + \varepsilon t + \frac{1}{r-v}\int_0^v \varepsilon t dv\right].$$

Wir gelangen, mit der abkürzenden Bezeichnung

$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{\int_0^v \varepsilon t dv}{(r-v)t}$$

zu der, irgend einem nur gedachten Belastungszustande, welcher von dem die Verschiebungen erzeugenden (a) durch den Zeiger b unterschieden werde, entsprechenden Arbeitsgleichung:

$$(102) \qquad \Sigma P_b \delta_a + \Sigma C_b \Delta c_a = \int \sigma_b \left(\frac{\sigma_a}{E} + \varepsilon' t\right) dV;$$

diese hat die gleiche Form, wie die aus (28) und 31) auf Seite 71 und 73 für den geraden Stab sich ergebende und als Annäherungsgleichung für Bögen mit grossen Krümmungshalbmessern bislang benutzte Beziehung

$$(103) \qquad \Sigma P_b \delta_a + \Sigma C_b \Delta c_a = \int \sigma_b \left(\frac{\sigma_a}{E} + \varepsilon t\right) dV$$

und es geht thatsächlich (102) in (103) über, sobald $r = \infty$ also $\varepsilon' = \varepsilon$ gesetzt wird, womit dann gleichzeitig σ den durch die Gleich. (40) gegebenen Werth annimmt.*)

Aus der übereinstimmenden Form der Gleich. (102) und (103) folgt überdies, dass die früher für den Fall eines beliebig veränderlichen εt

---

*) Man gelangt auch zur Gleich. 102 durch die Erwägung, dass die Kräfte $S = \sigma dF$ (Fig. 66) eine in die Halbirungslinie des Winkels $(-d\varphi)$ fallende Mittelkraft $S\frac{ds_v}{r-v}$ besitzen, dass sie also die virtuelle Formänderungsarbeit

$$dA_v = \sigma dF\left(\Delta ds_v + \frac{ds_v}{r-v}\Delta v\right) = \sigma dV\left(\frac{\Delta ds_v}{ds_v} + \frac{\Delta v}{r-v}\right)$$

verrichten.

und für beliebige σ gegebenen Ableitungen, namentlich die zu dem Maxwell'schen Satze führenden Gleichungen (73), (74) sowie die Gleichungen (80), (84), (85) auch unter den in diesem Paragraphen gemachten Voraussetzungen gültig sind.

Die weiteren Entwickelungen knüpfen wir an die Gleichung (101); die Anwendung derselben auf die Belastungszustände $X'=1$, $X''—1$, ... führt, wenn diesen Zuständen beziehungsweise die Längskräfte $N'N''$, ... und Biegungsmomente M', M'', ... entsprechen, zu den die Berechnung der statisch nicht bestimmbaren Grössen X ermöglichenden Beziehungen:

$$(104) \begin{cases} L' = \int \Delta ds N' + \int \Delta d\varphi \mathrm{M}' \\ L'' = \int \Delta ds N'' + \int \Delta d\varphi \mathrm{M}'' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

wobei L', L'', ... die von den Auflagerkräften bei Eintreten jener Belastungszustände geleisteten virtuellen Arbeiten bedeuten.

Die Gleichungen (104) lassen sich auch durch die Bedingung

$$(105) \quad L = \int \Delta ds \frac{\partial N}{\partial X} + \int \Delta d\varphi \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X}$$

ersetzen, unter X irgend eine statisch nicht bestimmbare Grösse und unter L die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand $X=1$ verstanden.

Drückt man Δds und $\Delta d\varphi$ mittelst der eine ungleichmässige Erwärmung berücksichtigenden, hingegen an die Voraussetzung $\frac{1}{m}=0$ gebundenen Gleich. (97) und (98) aus, so gehen die Beziehungen (104) über in

$$(106) \begin{cases} L' = \int \frac{\mathfrak{N}\mathfrak{N}' ds}{EF} + \int \frac{\mathrm{M}\mathrm{M}' ds}{EZ} + \int \varepsilon t_0 N' ds + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \mathrm{M}' ds \\ L'' = \int \frac{\mathfrak{N}\mathfrak{N}'' ds}{EF} + \int \frac{\mathrm{M}\mathrm{M}'' ds}{EZ} + \int \varepsilon t_0 N'' ds + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \mathrm{M}'' ds \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

wobei

$$\mathfrak{N} = N - \frac{\mathrm{M}}{r}, \quad \mathfrak{N}' = N' - \frac{\mathrm{M}'}{r}, \quad \mathfrak{N}'' = N'' - \frac{\mathrm{M}''}{r}, \dots\dots$$

ist, und Gleich. (105) lautet:

$$(107) \quad L = \int \frac{\mathfrak{N}}{EF} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial X} ds + \int \frac{\mathrm{M}}{EZ} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X} ds + \int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial X} ds + \int \frac{\varepsilon \Delta t}{h} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X} ds;$$

sie lässt sich, mit der Bezeichnung

$$(108)\quad A_i = \int \frac{\mathfrak{N}^2 ds}{2EF} + \int \frac{\mathrm{M}^2 ds}{2EZ} + \int \varepsilon t_0 N ds + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \mathrm{M} ds$$

auch schreiben:

$$(109)\quad L = \frac{\partial A_i}{\partial X},$$

und im Falle $L = 0$:

$$A_i = minimum,$$

wobei A_i bei angenommenen Lasten und Temperaturänderungen als Funktion der zunächst unabhängig veränderlich gedachten X aufzufassen ist.

Beispiel. Ein Bogenträger mit Kämpfergelenken, dessen Mittellinie AB ein Kreisbogen ist, wird in der Mitte durch eine senkrechte Kraft P belastet. Es soll der Horizontalschub X mit Hilfe der Gleich. (107) unter der Voraussetzung bestimmt werden, dass l in $l + \Delta l$ übergeht und der Bogen gleichmässig um t erwärmt wird.

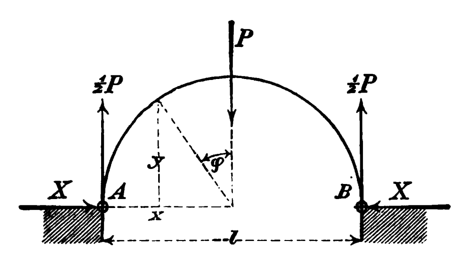


Fig. 176.

Für den Bogenquerschnitt bei $x < \frac{1}{2} l$ ist (wenn φ_0 den Werth von φ bei $x = 0$ bedeutet)

$$N = -\frac{P}{2} \sin \varphi - X \cos \varphi,$$

$$\mathrm{M} = \frac{P}{2} x - Xy = \frac{Pr}{2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) - Xr (\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

$$\mathfrak{N} = N - \frac{\mathrm{M}}{r} = -\frac{P}{2} \sin \varphi_0 - X \cos \varphi_0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial X} = -\cos \varphi, \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X} = -r (\cos \varphi - \cos \varphi_0), \quad \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial X} = -\cos \varphi_0,$$

während die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Fall $X = 1$:

$$L = -1 \cdot \Delta l$$

wird. Mit $ds = -r d\varphi$, $t_0 = t$ und $\Delta t = 0$ folgt deshalb bei konstantem E, F und Z, wenn $\int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial X} ds = -\varepsilon t l$ gesetzt wird:

$$\varepsilon t l - \Delta l = -\left(\frac{P}{2} \sin \varphi_0 + X \cos \varphi_0\right) \cos \varphi_0 \frac{r}{EF} 2 \int_{\varphi_0}^{0} d\varphi$$

$$+ \frac{Pr^2}{2EZ} \cdot 2 \int_{\varphi_0}^{0} (\varphi_0 - \sin \varphi)(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \, d\varphi$$

$$-\frac{Xr^3}{EZ}\cdot 2\int\limits_{\varphi_0}^{0}(\cos\varphi-\cos\varphi_0)^2 d\varphi$$

$$=\left(\frac{P}{2}\sin\varphi_0+X\cos\varphi_0\right)\cos\varphi_0\frac{r}{EF}\,2\varphi_0$$

$$-\frac{Pr^3}{EZ}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi_0-\varphi_0\sin\varphi_0\cos\varphi_0+\cos\varphi_0-1\right)$$

$$+\frac{Xr^3}{EZ}(2\varphi_0\cos^2\varphi_0+\varphi_0-3\sin\varphi_0\cos\varphi_0),$$

und hieraus ergiebt sich

$$X=\frac{P\left[\frac{3}{2}\sin^2\varphi_0+\cos\varphi_0-1-\varphi_0\cos\varphi_0\sin\varphi_0\left(1+\frac{Z}{Fr^2}\right)\right]+\frac{EZ}{r^3}(\varepsilon tl-\Delta l)}{\varphi_0-3\sin\varphi_0\cos\varphi_0+2\varphi_0\cos^2\varphi_0\left(1+\frac{Z}{Fr^2}\right)}.$$

4) Verschiebungen und Drehungen. Die Verschiebung δ des Angriffspunktes einer Last P (die auch $=0$ sein kann) im Sinne von P ist

$$(111)\qquad \delta=\int\Delta ds\,\overline{N}+\int\Delta d\varphi\,\overline{\mathrm{M}}-\overline{L},$$

wobei $\overline{N}$ = Längskraft,
$\overline{\mathrm{M}}$ = Biegungsmoment,
$\overline{L}$ = virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte

für den Fall, dass $P=1$ wird und sämmtliche statisch nicht bestimmbaren Grössen X verschwinden, während Δds und $\Delta d\varphi$ demjenigen Belastungszustande entsprechen müssen, welcher die Verschiebung δ hervorbringt. Man darf auch setzen

$$(112)\qquad \delta=\int\Delta ds\frac{\partial N}{\partial P}+\int\Delta d\varphi\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial P}-\Sigma\frac{\partial C}{\partial P}\Delta c.$$

Die Einführung der für Δds und $\Delta d\varphi$ durch die Gleich. 97) und (98) gegebenen Werthe liefert die den Gleichungen 54 und 55 gegenüber zu stellenden Beziehungen

$$(113)\qquad \delta_m=\int\frac{\mathfrak{N}\overline{\mathfrak{N}}ds}{EF}+\int\frac{\mathrm{M}\overline{\mathrm{M}}ds}{EZ}+\int\varepsilon t_0\overline{N}ds+\int\varepsilon\frac{\Delta t}{h}\overline{\mathrm{M}}ds-\overline{L},$$

$$(114)\qquad \delta_m=\int\frac{\mathfrak{N}}{EF}\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial P_m}ds+\int\frac{\mathrm{M}}{EZ}\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial P_m}ds+\int\varepsilon t_0\frac{\partial N}{\partial P_m}ds$$
$$+\int\varepsilon\frac{\Delta t}{h}\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial P_m}ds-\Sigma\frac{\partial C}{\partial P_m}\Delta c,$$

wobei

$$\overline{\mathfrak{N}}=\overline{N}-\frac{\overline{\mathrm{M}}}{r}$$

ist. In derselben Weise ergiebt sich für die Aenderung $\Delta\varphi$ des Neigungswinkels φ irgend einer an die Stabachse gelegten Tangente die Gleichung

$$(115)\quad \Delta\varphi = \int \frac{\mathfrak{N}\overline{\mathfrak{N}}\,ds}{EF} + \int \frac{\mathrm{M}\overline{\mathrm{M}}\,ds}{EZ} + \int \varepsilon t_0 \overline{N}\,ds + \int \frac{\varepsilon\Delta t}{h}\,\overline{\mathrm{M}}\,ds - \overline{L},$$

in welcher $\overline{N}$ und $\overline{\mathrm{M}}$ bezieh. die Längskraft und das Biegungsmoment für den Fall bedeuten, dass an der als starre, mit dem betrachteten Stabe fest verbundene Linie aufzufassenden Tangente und im Sinne der gesuchten Drehung ein Kräftepaar angreift, dessen Moment gleich „Eins“ ist, während die Grössen X verschwinden. $\overline{L}$ stellt die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für diesen Belastungszustand dar. An Stelle von Gleich. (115) darf auch gesetzt werden:

$$(116)\quad \Delta\varphi = \int \frac{\mathfrak{N}}{EF}\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial\mathfrak{M}}\,ds + \int \frac{\mathrm{M}}{EZ}\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\mathfrak{M}}\,ds + \int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial\mathfrak{M}}\,ds + \int \varepsilon\frac{\Delta t}{h}\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\mathfrak{M}}\,ds - \Sigma\frac{\partial C}{\partial\mathfrak{M}}\Delta c,$$

wenn $\mathfrak{M}$ das beliebig grosse Moment eines an der Tangente angreifenden Kräftepaares vorstellt. Vergl. Seite 77.

Beispiel. Es soll die Verlängerung Δl der Sehne $\overline{AB} = l$ eines ungleichmässig erwärmten krummen Stabes ohne Zwischengelenke bestimmt werden. Fig. 142.

Man erhält

$$(117)\quad \Delta l = \int \frac{\mathfrak{N}\overline{\mathfrak{N}}\,ds}{EF} + \int \frac{\mathrm{M}\overline{\mathrm{M}}\,ds}{EZ} + \int \varepsilon t_0 \overline{N}\,ds + \int \varepsilon\frac{\Delta t}{h}\,\overline{\mathrm{M}}\,ds,$$

wobei N und M der wirklichen Belastung entsprechen, während $\overline{N}$ und $\overline{\mathrm{M}}$ bezieh. die Längskraft und das Biegungsmoment bedeuten, welche für irgend einen Querschnitt des Bogens durch zwei in die Gerade AB fallende, im Sinne der gesuchten Verschiebung Δl wirkende Kräfte „Eins“ hervorgebracht werden.

Es ist $\overline{N} = 1 \cdot \cos\varphi$, $\overline{\mathrm{M}} = 1 \cdot y$ und

$$\overline{\mathfrak{N}} = \overline{N} - \frac{\overline{\mathrm{M}}}{r} = \cos\varphi - \frac{y}{r},$$

mithin ergiebt sich, bei konstantem ε, t_0, Δt:

$$(118)\quad \Delta l = \int\left(N - \frac{\mathrm{M}}{r}\right)\left(\cos\varphi - \frac{y}{r}\right)\frac{ds}{EF} + \int \frac{\mathrm{M}y\,ds}{EZ} + \varepsilon t_0 l + \varepsilon\Delta t\,\frac{y\,ds}{h}.$$

Beispielsweise ist für einen Halbkreisbogen, welcher die in Fig. 177 dargestellte Belastung durch zwei Kräfte Q erfährt:

$$N = Q\cos\varphi,\quad \mathrm{M} = Qy,\quad y = r\cos\varphi,\quad N - \frac{\mathrm{M}}{r} = 0$$

und, wegen $ds = -r\,d\varphi$, bei konstantem E, Z, h:

$$\Delta l = -\frac{Qr^3}{EZ}\int_{+\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi + \varepsilon t_0 l - \frac{\varepsilon\Delta t r^2}{h}\int_{+\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= 2\left[\frac{Qr^3}{EZ}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi + \frac{\varepsilon\Delta t r^2}{h}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\varphi\,d\varphi\right] + \varepsilon t_0 2r,$$

$$(119)\quad \Delta l = \frac{Qr^3\pi}{2EZ} + 2r\varepsilon\left(t_0 + \Delta t\frac{r}{h}\right).$$

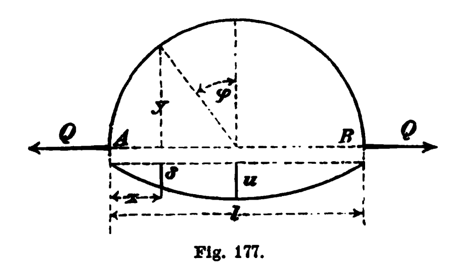


Fig. 177.

5) Die Biegungslinie. Setzt man in die im § 18 für die Biegungslinie eines einfach gekrümmten Stabes entwickelte Gleichung:

$$-\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{\Delta d\varphi}{dx} + \frac{d\left(\frac{\Delta ds}{dx}\operatorname{tg}\varphi\right)}{dx},$$

die durch die Gleich. (97) und (98) für $\Delta d\varphi$ und Δds gegebenen Werthe ein, so erhält man (mit $dx = ds\cos\varphi = -r\,d\varphi\cos\varphi$):

$$(120)\quad -\frac{d^2\delta}{dx^2} = \left(\frac{\mathrm{M}}{EZ} + \frac{\varepsilon\Delta t}{h} - \frac{\mathfrak{N}}{EFr}\right)\sec\varphi + \frac{d\left[\left(\frac{\mathfrak{N}}{EF} + \varepsilon t_0\right)\operatorname{tg}\varphi\right]}{dx},$$

und es lassen sich jetzt, ebenso wie im § 18, die Verschiebungen δ mittels eines Seilpolygons darstellen, dessen Belastungsordinate

$$(121)\quad z = \left(\frac{\mathrm{M}}{EZ} + \frac{\varepsilon\Delta t}{h} - \frac{\mathfrak{N}}{EFr}\right)\sec\varphi + \frac{d\left[\left(\frac{\mathfrak{N}}{EF} + \varepsilon t_0\right)\operatorname{tg}\varphi\right]}{dx}$$

ist. Sind Zwischengelenke vorhanden, so ist nach Seite 150 zu verfahren.

Für manche Fälle ist es vortheilhaft, Gleich. (120) umzuformen in

$$(122)\quad -\frac{d^2\delta}{dx^2} = \left(\frac{\mathrm{M}}{EZ} + \frac{\varepsilon\Delta t}{h}\right)\frac{ds}{dx} + \frac{\mathfrak{N}}{EF}\frac{d^2y}{dx^2}\left[1 + \left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{d\left(\frac{\mathfrak{N}}{EF}\right)}{dx}\frac{dy}{dx} + \varepsilon t_0\frac{d^2y}{dx^2};$$

hierbei ist t_0 für sämmtliche Punkte der Stabachse gleich gross angenommen.

Beispiel 1. Gesucht ist die Biegungslinie eines Halbkreisbogens, welcher nach Fig. 177 durch zwei Kräfte Q belastet wird. Es sei $t = 0$.

Für den Stabquerschnitt bei x ist

$$N = Q \cos \varphi, \quad \mathrm{M} = Qr \cos \varphi, \quad \mathfrak{N} = N - \frac{\mathrm{M}}{r} = 0,$$

mithin
$$-\frac{d^2 \delta}{dx^2} = \frac{Qr}{EZ}.$$

Nach § 18 stimmt die gesuchte Biegungslinie mit der Momentenkurve eines einfachen Balkens überein, dessen Längeneinheit die konstante Belastung

$$z = \frac{Qr}{EZ}$$

trägt, und es ist mithin die Biegungslinie eine Parabel, deren Pfeil

$$(123) \quad u = \frac{zr^2}{2} = \frac{Qr^3}{2EZ}$$

ist, und deren Gleichung

$$(124) \quad \delta = \frac{ux(2r - x)}{r^2} = \frac{Qrx(2r - x)}{2EZ}$$

lautet.

Beispiel 2. Gesucht sei für einen Bogenträger mit halbkreisförmiger Mittellinie der durch eine Einzellast P, eine gleichmässige Erwärmung um t und eine Vergrösserung der Stützweite l um Δl erzeugte Horizontalschub X. Der Querschnitt sei konstant, und an den Kämpfern mögen Gelenke liegen. Fig. 178.

Nachdem für den in Fig. 177 dargestellten Belastungsfall (mit $Q = 1$) die Biegungslinie $A'S'B'$ und die Verlängerung

$$\xi = \frac{\pi r^3}{2EZ} \text{ (nach Gleich. 119)}$$

der Sehne AB ermittelt worden sind, wird, genau wie auf Seite 171, mit Hilfe des Maxwell'schen Satzes der Werth gefolgert:

$$X = \frac{P\delta + \varepsilon t l - \Delta l}{\xi},$$

Fig. 178.

wobei δ die unter der Last P gemessene Ordinate der Linie $A'S'B'$ bedeutet.

Wegen

$$\delta = \frac{ra\,(2r - a)}{2EZ} \quad \text{(nach Gleich. 124)}$$

ergiebt sich

$$X = \frac{Pa\,(2r - a)}{\pi r^2} + \frac{2EZ}{\pi r^3}\,(2\varepsilon t r - \Delta l).$$

Bei ungleichmässiger Erwärmung tritt nach Gl. (119) an die Stelle von $2\varepsilon t r$ der Werth $2\varepsilon r\left(t_0 + \Delta t\frac{r}{h}\right)$.

Ist beispielsweise $r = 12h$ und $\Delta t = \frac{t_0}{4}$, so folgt $t_0 + \Delta t\frac{r}{h} = 4t_0$, und der durch die ungleichmässige Erwärmung erzeugte Horizontalschub ergiebt sich viermal so gross wie der im Falle $t = Konst.$ entstehende. Man ersieht hieraus, welch grossen Einfluss eine ungleichmässige Erwärmung oder Abkühlung haben kann.

6) Berücksichtigung der Aenderung der Querschnittsabmessungen bei Berechnung der σ, Δds und $\Delta d\varphi$. Die Differentiation der aus Gleich. (86) und (87) folgenden Beziehung

$$\frac{\sigma}{E}(r - v) = \frac{\Delta ds}{ds}\,r - \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\,v - \Delta v - \varepsilon t\,(r - v)$$

liefert, wenn zunächst der Zustand $t = 0$ vorausgesetzt wird,

$$\frac{d\sigma}{dv}\,\frac{r - v}{E} - \frac{\sigma}{E} = -\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta dv}{dv},$$

worein zu setzen

$$\frac{\Delta dv}{dv} = -\frac{\sigma}{mE}.$$

Es entsteht mit der Abkürzung $\frac{m+1}{m} = \mu$:

$$\frac{d\sigma}{dv} - \mu\,\frac{\sigma}{r - v} + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\,\frac{E}{r - v} = 0$$

und hieraus durch Integration*)

$$\sigma = \frac{C}{(r - v)^{\mu}} + \frac{1}{\mu}\,\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\,E,$$

wobei C die Integrationskonstante bedeutet. Für $v = 0$ soll sein: $\frac{\sigma}{E} = \frac{\Delta ds}{ds}$, und es folgt daher

---

*) Einer Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} - yF(x) + F_1(x) = 0$ entspricht das Integral:

$$z = \left(e^{\int F(x)\,dx}\right)\left(C - \int F_1(x)\,e^{-\int F(x)\,dx}\,dx\right).$$

$$E\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{C}{r^{\mu}} + \frac{1}{\mu}\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}E, \text{ mithin}$$

$$C = E\left(\frac{\Delta ds}{ds} - \frac{1}{\mu}\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\right)r^{\mu} \text{ und schliesslich}$$

$$\frac{\sigma}{E} = \alpha + \beta\frac{1}{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^{\mu}},$$

wobei

$$\alpha = \frac{m}{m+1}\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \text{ und } \beta = \frac{\Delta ds}{ds} - \alpha.$$

Die beiden Gleichgewichtsbedingungen

$$N = \int \sigma dF \text{ und } M = \int \sigma v dF$$

gehen über in

$$\frac{N}{E} = \alpha F + \beta\int\frac{dF}{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^{\mu}}; \quad \frac{M}{E} = \beta\int\frac{v dF}{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^{\mu}}$$

und liefern, mit den Bezeichnungen:

$$K_1 = \int\frac{dF}{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^{\mu}}; \quad K_2 = \int\frac{\frac{v}{r}dF}{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^{\mu}} = K_1 - \int\frac{dF}{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^{\mu-1}}$$

die Werthe

$$\beta = \frac{M}{EK_2 r}, \quad \alpha = \frac{N}{EF} - \frac{M}{EFr}\frac{K_1}{K_2},$$

weshalb sich für die Spannung σ der Ausdruck ergiebt

$$(125) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{rK_2}\left(\frac{1}{\sqrt[m]{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^{m+1}}} - \frac{K_1}{F}\right);$$

derselbe bleibt bei Eintreten einer ungleichmässigen Erwärmung ungeändert, sobald t dem durch die Gleich. (91) gegebenen Gesetze folgt.

Bestimmt man noch $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{m+1}{m}\alpha$ und $\frac{\Delta ds}{ds} = \alpha + \beta$ und fügt zu diesen Werthen die für jene ungleichmässige Erwärmung auf Seite 197 und 198 nachgewiesenen Beiträge $\frac{\Delta ds}{ds} = \varepsilon t_0$ und $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = -\varepsilon\Delta t\frac{r}{h}$, so gelangt man zu

$$(126)\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta ds}{ds} = \dfrac{N}{EF} - \dfrac{\mathrm{M}}{EFr}\,\dfrac{K_1 - F}{K_2} + \varepsilon t_0 \\[2ex] \dfrac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \dfrac{m+1}{m}\left(\dfrac{N}{EF} - \dfrac{\mathrm{M}}{EFr}\,\dfrac{K_1}{K_2}\right) - \varepsilon \Delta t\,\dfrac{r}{h}. \end{cases}$$

Für ein **Rechteck** von der Breite b und der Höhe h ergiebt sich beispielsweise, wegen $dF = b\,dv$:

$$K_1 = F\frac{r}{h}\,\omega_1;\quad K_2 = F\frac{r}{h}\,(\omega_1 - \omega_2),\ \text{wobei}$$

$$\omega_1 = m\left[\frac{1}{\sqrt[m]{1 - \dfrac{h}{2r}}} - \frac{1}{\sqrt[m]{1 + \dfrac{h}{2r}}}\right];$$

$$\omega_2 = \frac{m}{m-1}\left[\sqrt[m]{\left(1 + \frac{h}{2r}\right)^{m-1}} - \sqrt[m]{\left(1 - \frac{h}{2r}\right)^{m-1}}\right].$$

Ist $r = 5h$ und $m = 3$, so erhält man $\omega_1 = 0{,}201042$, $\omega_2 = 0{,}200148$,

$$\frac{K_1}{F} = 5\omega_1 = 1{,}005210,\quad rK_2 = 25Fh\,(\omega_1 - \omega_2) = 0{,}02235\,bh^2,$$

$$\sigma = \frac{N}{bh} + \frac{\mathrm{M}}{0{,}02235\,bh^2}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 - \dfrac{v}{r}\right)^4}} - 1{,}005240\right]$$

und für $v = +\frac{1}{2}h$ bezieh. $v = -\frac{1}{2}h$:

$$\sigma_1 = \frac{N}{bh} + 6{,}514\,\frac{\mathrm{M}}{bh^2},\quad \sigma_2 = \frac{N}{bh} - 5{,}119\,\frac{\mathrm{M}}{bh^2}.$$

Die Anwendung der Gleich. (96) hätte mit $Z = 1{,}006\,J$ geliefert:

$$\sigma_1 = \frac{N}{bh} + 6{,}427\,\frac{\mathrm{M}}{bh^2},\quad \sigma_2 = \frac{N}{bh} - 5{,}623\,\frac{\mathrm{M}}{bh^2}$$

und die für den geraden Stab abgeleitete Gleich. (40):

$$\sigma_1 = \frac{N}{bh} + 6\,\frac{\mathrm{M}}{bh^2},\quad \sigma_2 = \frac{N}{bh} - 6\,\frac{\mathrm{M}}{bh^2}.$$

Abschnitt III.

§ 23.

Drehungsfestigkeit.

1) Spannungen. Wird ein gerader Stab durch Kräftepaare beansprucht, deren Ebenen die Stabachse rechtwinklig schneiden, so besitzen nur die in den Querschnitten hervorgerufenen und in der Folge mit τ bezeichneten Schubspannungen einen wesentlichen Einfluss auf die Formänderung. Auf jeden Querschnitt wirkt ein Moment M_d, welches das Drehungs- oder Torsions-Moment genannt wird und gleich der algebraischen Summe der Momente der zwischen jenem Querschnitte und dem Stabende angreifenden Kräftepaare ist.

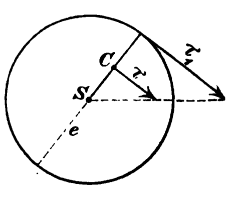


Fig. 179.

Ist der Querschnitt ein Kreis vom Radius e, auf welchen Fall die folgenden Untersuchungen beschränkt bleiben mögen, so ist die in irgend einem Punkte C (Fig. 179) auftretende Schubspannung τ rechtwinklig zu der von C nach dem Kreismittelpunkte S gezogenen Geraden, deren Länge $\overline{SC} = \rho$ sei, und es verhält sich, wenn τ_1 den Werth von τ für $\rho = e$ bedeutet,

$$\tau : \tau_1 = \rho : e.$$

Das Gleichgewicht zwischen den inneren und äusseren Kräften verlangt:

$$M_d = \int \rho \tau dF = \frac{\tau_1}{e} \int \rho^2 dF,$$

wobei das Integral über den ganzen Querschnitt auszudehnen ist, und es ergiebt sich, wenn

$$(127) \qquad \int \rho^2 dF = J_p$$

gesetzt wird,

$$(128) \qquad \tau_1 = \frac{M_d e}{J_p} \text{ und } \tau = \frac{M_d \rho}{J_p}.$$

2) Drehungswinkel. Der von irgend einem auf der Stabachse angenommenen Ausgangspunkte A um s entfernte Querschnitt D wird sich gegen den bei $s + ds$ gelegenen Querschnitt D_1 um einen Winkel $d\mathfrak{I}$ drehen, und hierbei wird sich der Angriffspunkt C der Schubspannung τ gegen den gleich gelegenen Punkt C_1 des Querschnittes D_1 um $\rho d\mathfrak{I}$ verschieben. Ist C' die neue Lage von C und setzt man

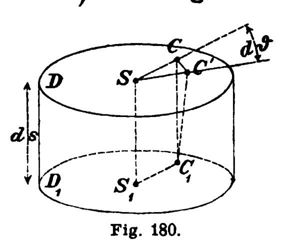


Fig. 180.

$$\angle C' C_1 C = \gamma,$$

so folgt $\overline{C'C} = \gamma ds$, und es ist mithin $\rho d\mathfrak{I} = \gamma ds$, woraus sich

$$d\mathfrak{I} = \gamma \frac{ds}{\rho}$$

ergiebt. Man nennt γ die Gleitung im Punkte C; sie ist der Spannung τ proportional und durch

$$(129) \quad \gamma = \frac{\tau}{G}$$

gegeben, wobei G den Gleitmodul (Schub-Elasticitätsmodul) bedeutet.

Der Ausdruck für $d\mathfrak{I}$ geht nun über in

$$(130) \quad d\mathfrak{I} = \frac{\tau ds}{G\rho} = \frac{\mathrm{M}_d ds}{GJ_p}$$

und die Drehung des Querschnittes D gegen einen um s von ihm entfernten Querschnitt wird

$$(131) \quad \mathfrak{I} = \int_0^s \frac{\mathrm{M}_d ds}{GJ_p}.^{*)}$$

Zwischen den beiden Elasticitätsmoduln E und G besteht die Beziehung

$$(132) \quad G = \frac{mE}{2(m+1)},$$

wenn $\frac{1}{m}$ den Koefficienten der Querdehnung bedeutet. Für Metalle ist $m = 3$ bis 4.

3) Die Arbeitsgleichung. Da man alle in einem Querschnitte wirksamen Schubkräfte zu einem Kräftepaare vereinigen kann, dessen Moment den absoluten Werth M_d hat, so ist die virtuelle Arbeit dieser Schubkräfte bei einer Drehung des Querschnittes um einen beliebigen Winkel $d\mathfrak{I}$ (wenn der um ds entfernte Nachbarquerschnitt relativ festliegt):

*) Ist der Stabquerschnitt kein Kreis, so tritt nach Saint-Venant (Comptes rendus 1879, Band 88, Seite 144) an die Stelle von J_p der Werth $\frac{F^4}{\varkappa J_p}$, wobei, genügend genau, $\varkappa = 40$ gesetzt werden darf.

$$dA_v = \mathrm{M}_d d\mathfrak{J},$$

und es ergiebt sich die virtuelle Formänderungs-Arbeit des ganzen Stabes

$$A_v = \int \mathrm{M}_d d\mathfrak{J}.$$

Die Arbeitsgleichung lautet mit den auf Seite 16 erklärten Bezeichnungen P, C, δ, Δc:

$$(133) \quad \Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c = \int \mathrm{M}_d d\mathfrak{J};$$

sie gilt im Falle des Gleichgewichtes zwischen den äusseren und inneren Kräften für beliebige, verschwindend kleine, zusammengehörige Formänderungen und kann in derselben Weise wie die entsprechenden Arbeitsgleichungen der Abschnitte I und II benutzt werden, um statisch nicht bestimmbare Grössen X und Verschiebungen δ zu ermitteln. Die theilweise Differentiation von Gleich. 133 nach einer Grösse X oder einer Last L führt zu den Beziehungen

$$(134) \quad L = \int \frac{\partial \mathrm{M}_d}{\partial X} d\mathfrak{J} = \int \frac{\mathrm{M}_d}{GJ_p} \frac{\partial \mathrm{M}_d}{\partial X} ds \text{ und}$$

$$(135) \quad \delta_m = \int \frac{\partial \mathrm{M}_d}{\partial P_m} d\mathfrak{J} - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c = \int \frac{\mathrm{M}_d}{GJ_p} \frac{\partial \mathrm{M}_d}{\partial P_m} ds - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c,$$

wobei die Lasten P und die Grössen X als unabhängige Veränderliche aufzufassen sind. L bedeutet, wie früher, die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand $X = 1$.

4) Zusammensetzung von Drehungs- und Biegungs-Festigkeit. Die Gleichungen (134) und (135) eignen sich besonders für die Beurtheilung des Einflusses der Drehungsmomente in Fällen gleichzeitiger Beanspruchung auf Drehungs- und Biegungs-Festigkeit, namentlich für die Untersuchung von Stäben kreisförmigen Querschnitts, die bei beliebiger Gestalt der Mittellinie durch irgend welche Kräfte belastet werden.

Ist die Mittellinie des Stabes eine Kurve doppelter Krümmung, so beziehe man den Querschnitt auf rechtwinklige Koordinatenachsen (u, v) und lasse die v-Achse mit dem Krümmungsradius (d. h. also mit der Hauptnormale) zusammenfallen; die u-Achse steht dann senkrecht zur Schmiegungsebene und deckt sich mit der Binormale. Nun denke man den Stab durch den fraglichen Querschnitt in zwei Theile zerlegt, ersetze die Mittelkraft R der auf den einen der beiden Theile wirkenden äusseren Kräfte durch die aufeinander senkrechten Seitenkräfte:

N (Längskraft) senkrecht zur Querschnittsebene,
Q_u (Querkraft) parallel der u-Achse,
Q_v „ „ „ v-Achse

und bestimme die von der Kraft R ausgeübten Momente:

M_d, in Bezug auf eine zum Querschnitte senkrechte Achse,
M_u, „ „ „ die u-Achse,
M_v, „ „ „ „ v-Achse.

In Folge von N und M_u entsteht nach § 22, Gl. 96 in irgend einem Querschnittspunkte (u, v) die Spannung

$$\sigma = \frac{\mathfrak{N}}{F} + \frac{M_u v}{Z} \frac{r}{r - v},$$

wobei

$$\mathfrak{N} = N - \frac{M_u}{r},$$

$$Z = J\left[1 + \frac{3}{6}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{10}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \dots\right],$$

$J = \frac{\pi e^4}{4}$, $F = \pi e^2$, e = Halbmesser des Kreisquerschnittes,

r = Krümmungshalbmesser der Mittellinie,

während die durch das Moment M_v erzeugte Spannung σ mittels der für den geraden Stab entwickelten Formel

$$\sigma = \frac{M_v u}{J}$$

zu berechnen ist, da die Schmiegungsebene drei aufeinander folgende Punkte der Mittellinie enthält.

Zu der gesammten Längsspannung

$$(136) \quad \sigma = \frac{\mathfrak{N}}{F} + \frac{M_u v}{Z} \frac{r}{r - v} + \frac{M_v u}{J}$$

tritt noch eine Schubspannung, welche mit der hier als zulässig angenommenen Vernachlässigung der von Q_u und Q_v abhängigen Beiträge gleich

$$(137) \quad \tau = \frac{M_d \rho}{J_p} = \frac{M_d \rho}{2J}$$

ist, und es ergiebt sich hiermit die Inanspruchnahme an der Stelle (uv):

$$(138) \quad k = \frac{m - 1}{2m} \sigma + \frac{m + 1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Hinsichtlich der Vorzeichen der von den äusseren Kräften abhängigen Werthe gilt Folgendes:

Das Moment M_u ist positiv, sobald es den Krümmungshalbmesser r der Stab-Mittellinie zu vergrössern sucht; der Krümmungsmittelpunkt muss hierbei auf dem positiven Theile der v-Achse liegen, vergl. § 22.

Das Moment M_v ist positiv, sobald es bestrebt ist, auf der Seite der positiven u-Achse Zugspannungen hervorzubringen.

Die Längskraft N ist positiv, sobald sie den Stab an der betrachteten Stelle zu zerreissen trachtet.

Das Vorzeichen von M_d ist gleichgiltig, da in k die Schubspannung τ nur im Quadrat vorkommt.

Statisch nicht bestimmbare Grössen X lassen sich (für den in der Folge vorausgesetzten Zustand $t = 0$) mit Hilfe der aus (53), (107) und (134) sich ergebenden Arbeitsbedingung

$$(139)\quad L = \int \frac{\mathfrak{N}}{EF} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial X} ds + \int \frac{\mathbf{M}_u}{EZ} \frac{\partial \mathbf{M}_u}{\partial X} ds + \int \frac{\mathbf{M}_v}{EJ} \frac{\partial \mathbf{M}_v}{\partial X} ds + \int \frac{\mathbf{M}_d}{GJ_p} \frac{\partial \mathbf{M}_d}{\partial X} ds$$

ermitteln, und zur Berechnung von Verschiebungen δ kann die Gleichung

$$(140)\quad \delta_m = \int \frac{\mathfrak{N}}{EF} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial P_m} ds + \int \frac{\mathbf{M}_u}{EZ} \frac{\partial \mathbf{M}_u}{\partial P_m} ds + \int \frac{\mathbf{M}_v}{EJ} \frac{\partial \mathbf{M}_v}{\partial P_m} ds + \int \frac{\mathbf{M}_d}{GJ_p} \frac{\partial \mathbf{M}_d}{\partial P_m} ds - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c$$

benutzt werden.

Aufgabe 1. Ein Ring von konstantem Querschnitte und kreisförmiger Mittellinie (Fig. 181) wird bei A durchgeschnitten und unmittelbar zu beiden Seiten der Schnittstelle von zwei entgegengesetzt gleichen, zur Stabebene rechtwinkligen Kräften P ergriffen. Es soll angegeben werden, um wie viel sich der Ring, dessen Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser e ist, bei A öffnet, und wie gross seine Beanspruchung ist.

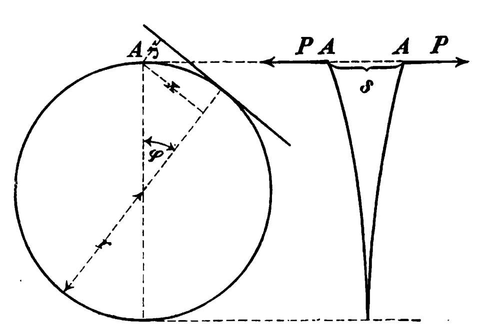


Fig. 181.

Bedeuten y und x die von A auf eine beliebige Tangente und den durch ihren Berührungspunkt gehenden Halbmesser gefällten Lothe, so entsteht in Bezug auf die in die Stabebene fallende v-Achse jenes Querschnittes das Biegungsmoment

$$\mathbf{M}_v = Px.$$

Das Drehungsmoment ist

$$\mathbf{M}_d = Py$$

und die gesuchte Oeffnungsweite:

$$\delta = 2 \int_0^\pi \frac{\mathbf{M}_v}{EJ} \frac{\partial \mathbf{M}_v}{\partial P} ds + 2 \int_0^\pi \frac{\mathbf{M}_d}{GJ_p} \frac{\partial \mathbf{M}_d}{\partial P} ds.$$

Mit Rücksicht auf

$$\frac{\partial \mathrm{M}_v}{\partial P} = x, \quad \frac{\partial \mathrm{M}_d}{\partial P} = y \text{ und } \frac{EJ}{GJ_p} = \frac{m+1}{m}$$

folgt:

$$\delta = \frac{2P}{EJ}\left(\int_0^\pi x^2 ds + \frac{m+1}{m}\int_0^\pi y^2 ds\right)$$

$$= \frac{2Pr^3}{EJ}\left(\int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi + \frac{m+1}{m}\int_0^\pi (1-\cos\varphi)^2 d\varphi\right)$$

$$= \frac{\pi P r^3}{EJ}\left(1 + 3\,\frac{m+1}{m}\right),$$

und beispielsweise für $m = 3$, mit $J = \frac{\pi e^4}{4}$:

$$\delta = \frac{20 Pr^3}{Ee^4}.$$

Die Inanspruchnahme des Ringes ist nach (138) mit $m = 3$:

$$k = \frac{1}{3}\sigma + \frac{2}{3}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

worein zu setzen:

$$\sigma = \mathrm{M}_v \frac{e}{J} = \frac{4Pr\sin\varphi}{\pi e^3}, \quad 2\tau = \frac{\mathrm{M}_d e}{J} = \frac{4Pr(1-\cos\varphi)}{\pi e^3}.$$

Es folgt $k = \frac{4Pr}{3\pi e^3}\left(\sin\varphi + 2\sqrt{\sin^2\varphi + (1-\cos\varphi)^2}\right)$

$$= \frac{4Pr}{3\pi e^3}\left(\sin\varphi + 4\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Dieser Werth wird am grössten für $\varphi = 137^0 4'$ und zwar ergiebt sich hiermit

$$k_{max} = 1{,}869\,\frac{Pr}{e^3}.\text{*)}$$

Aufgabe 2. Ein Stab ASA (Fig. 182) mit halbkreisförmiger, in einer wagerechten Ebene gedachten Mittellinie und konstantem Querschnitte ist an beiden Enden fest eingespannt und mit einer Kraft $2P$ belastet, welche in der zur Stabebene senkrechten Symmetrieebene liegt, mit der Stabebene den Winkel α einschliesst und auf der im Halbirungspunkte S des Kreisbogens zur Stabebene errichteten Senkrechten die Strecke $SB = c$ abschneidet. Es soll die Inanspruchnahme des Stabes, dessen Querschnitt ein Kreis vom Radius e ist, ermittelt werden.

Wir denken den Stab bei S aufgeschnitten, nehmen an jeder Stabhälfte die Kraft P an und ersetzen die in der Schnittfläche bei S wirkenden

*) Vergl. Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit. Berlin 1878, Seite 296.

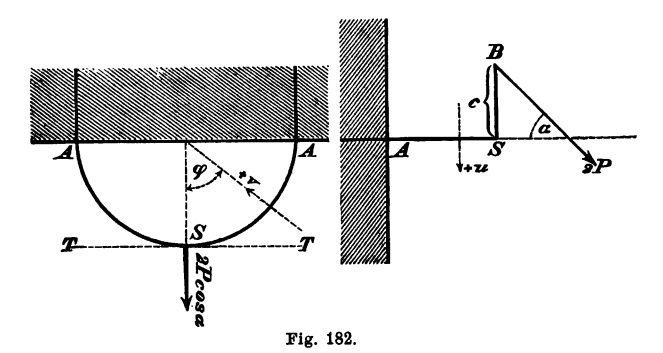


Fig. 182.

inneren Kräfte durch ihre Mittelkraft H. Wegen der Symmetrie des Belastungszustandes ist H parallel der in S an die Stabachse gelegten Tangente TT; sie habe von der Stabebene den Abstand b, während die Entfernung ihrer Projektion auf die Stabebene vom Punkte S gleich a sein möge, und es werde gesetzt

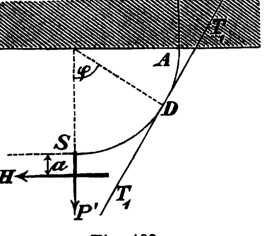


Fig. 183.

$$Ha = \mathrm{M}_1; \; Hb = \mathrm{M}_2.$$

Nach Zerlegung von P in $P' = P \cos \alpha$ und $P'' = P \sin \alpha$ ergiebt sich für einen beliebigen Querschnitt D (vergl. Fig. 183, in welcher die auf eine Stabhälfte wirkenden Kräfte auf die Stabebene projicirt sind):

die Längskraft $N = H \cos \varphi + P' \sin \varphi$,

das um die zur Stabebene senkrechte u-Achse drehende Biegungsmoment

$$\mathrm{M}_u = P'r \sin \varphi - H(r + a - r \cos \varphi)$$
$$= P'r \sin \varphi - Hr(1 - \cos \varphi) - \mathrm{M}_1,$$

das um die in die Stabebene fallende v-Achse drehende Biegungsmoment (nach Zerlegung von H in $H \cos \varphi$ und $H \sin \varphi$)

$$\mathrm{M}_v = - P''r \sin \varphi - P' \sin \varphi \cdot c - H \cos \varphi \cdot b$$
$$= -(P''r + P'c) \sin \varphi - \mathrm{M}_2 \cos \varphi$$

und das um die in D an die Stabachse gelegte Tangente $T_1 T_1$ drehende Torsionsmoment

$$\mathrm{M}_d = P''r(1 - \cos \varphi) - P'c \cos \varphi + \mathrm{M}_2 \sin \varphi.$$

Sind nun H, M_1, M_2 bekannt, so vermag man für jeden Punkt u, v des Querschnittes die Spannungen σ und τ sowie die Inanspruchnahme k mit Hilfe der Gleichungen (136) bis (138) anzugeben, worauf der stets einem Umfangspunkte entsprechende Werth k_{max} berechnet werden kann.

Die statisch nicht bestimmbaren Grössen H, M_1, M_2 lassen sich mittelst der Bedingung

$$0=\frac{1}{EF}\int\mathfrak{N}\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial X}\,ds+\frac{1}{EZ}\int\mathrm{M}_u\frac{\partial\mathrm{M}_u}{\partial X}\,ds+\frac{1}{EJ}\int\mathrm{M}_v\frac{\partial\mathrm{M}_v}{\partial X}\,ds$$
$$+\frac{1}{GJ_p}\int\mathrm{M}_d\frac{\partial\mathrm{M}_d}{\partial X}\,ds,$$

in welcher $\mathfrak{N}=N-\frac{\mathrm{M}_u}{r}=H+\frac{\mathrm{M}_1}{r}$ ist, berechnen; man hat nur nöthig, für X der Reihe nach H, M_1 und M_2 zu setzen, um drei Gleichungen mit drei Unbekannten zu erhalten.

Zunächst sollen die in jenen drei Gleichungen vorkommenden, zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmenden Integrale gesondert berechnet werden. Es ist, mit $ds=r\,d\varphi$:

$$\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial H}=1,\quad\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathfrak{N}\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial H}\,ds=\left(H+\frac{\mathrm{M}_1}{r}\right)\frac{r\pi}{2},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial\mathrm{M}_1}=\frac{1}{r},\quad\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathfrak{N}\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial\mathrm{M}_1}\,ds=\left(H+\frac{\mathrm{M}_1}{r}\right)\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\partial\mathrm{M}_u}{\partial H}=-r\,(1-\cos\varphi),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{M}_u\frac{\partial\mathrm{M}_u}{\partial H}\,ds=-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}[P'r\sin\varphi-Hr\,(1-\cos\varphi)-\mathrm{M}_1]\,r^2\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi$$
$$=-r^3\left[\frac{P'}{2}-H\left(\frac{3\pi}{4}-2\right)-\frac{\mathrm{M}_1}{r}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right],$$

$$\frac{\partial\mathrm{M}_u}{\partial\mathrm{M}_1}=-1,\quad\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{M}_u\frac{\partial\mathrm{M}_u}{\partial\mathrm{M}_1}\,ds=-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}[P'r\sin\varphi-Hr(1-\cos\varphi)-\mathrm{M}_1]\,r\,d\varphi$$
$$=-r^2\left[P'-H\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\frac{\mathrm{M}_1}{r}\,\frac{\pi}{2}\right],$$

$$\frac{\partial\mathrm{M}_v}{\partial\mathrm{M}_2}=-\cos\varphi,\quad\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{M}_v\frac{\partial\mathrm{M}_v}{\partial\mathrm{M}_2}\,ds=+\int_0^{\frac{1}{2}\pi}[(P'c+P''r)\sin\varphi+\mathrm{M}_2\cos\varphi]\,r\cos\varphi\,d\varphi$$
$$=\frac{r}{2}\left(P'c+P''r+\mathrm{M}_2\,\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{\partial\mathrm{M}_d}{\partial\mathrm{M}_2}=\sin\varphi,\quad\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{M}_d\frac{\partial\mathrm{M}_d}{\partial\mathrm{M}_2}\,ds=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}[P''r(1-\cos\varphi)-P'c\cos\varphi+\mathrm{M}_2\sin\varphi]\,r\sin\varphi\,d\varphi$$
$$=\frac{r}{2}\left(P''r-P'c+\mathrm{M}_2\,\frac{\pi}{2}\right),$$

und es lautet daher die obige Arbeitsgleichung

für $X = H$:

$$\frac{1}{EF}\left(H + \frac{M_1}{r}\right)\frac{\pi r}{2} - \frac{r^3}{EZ}\left[\frac{P'}{2} - H\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right) - \frac{M_1}{r}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right] = 0,$$

für $X = M_1$:

$$\frac{1}{EF}\left(H + \frac{M_1}{r}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{r^2}{EZ}\left[P' - H\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \frac{M_1}{r}\frac{\pi}{2}\right] = 0,$$

für $X = M_2$:

$$\frac{r}{2EJ}\left(P'c + P''r + M_2\frac{\pi}{2}\right) + \frac{r}{2GJ_p}\left(P''r - P'c + M_2\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$1 + \frac{Z}{Fr^2} = \varkappa$$

und beachtet, dass $\frac{EJ}{GJ_p} = \frac{m+1}{m}$ ist, so ergeben sich aus den drei Bedingungen die Werthe:

$$H = 2P\cos\alpha\,\frac{4 - \varkappa\pi}{\varkappa\pi^2 - 8},$$

$$M_1 = 2Pr\cos\alpha\,\frac{(\varkappa + 1)\pi - 6}{\varkappa\pi^2 - 8},$$

$$M_2 = \left[\frac{Pc\cos\alpha}{2m + 1} - Pr\sin\alpha\right].$$

Die gestellte Aufgabe ist hiermit gelöst.

Ist die Last $2P$ parallel zur Stabebene, d. h. ist $\alpha = 0$, so ergiebt sich

$$H = 2P\frac{4 - \varkappa\pi}{\varkappa\pi^2 - 8},\quad M_1 = 2Pr\frac{(\varkappa + 1)\pi - 6}{\varkappa\pi^2 - 8},\quad M_2 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{Pc}{2m + 1}.$$

H und M_1 sind unabhängig von c; beide Werthe hätten mit Hilfe der im § 22 für den einfach gekrümmten Stab gegebenen Gesetze entwickelt werden können.

Ist die Last $2P$ senkrecht zur Stabebene ($\alpha = 90$), so ergiebt sich

$$H = 0,\quad M_1 = 0,\quad M_2 = -\frac{2Pr}{\pi}.$$

Für eine beliebige, jedoch in Bezug auf den Halbirungspunkt S des Bogens ASA symmetrische Belastung erhält man

$$\mathfrak{N} = F(P) + H + \frac{M_1}{r};\quad M_u = F_1(P) - Hr(1 - \cos\varphi) - M_1;$$

$$M_v = F_2(P) - M_2\cos\varphi;\quad M_d = F_3(P) + M_2\sin\varphi,$$

wobei $F(P)$, $F_1(P)$, $F_2(P)$, $F_3(P)$ gegebene Funktionen der Lasten sind. Die nach H, M_1 und M_2 gebildeten theilweisen Differentialquotienten der Grössen $\mathfrak{N}$, M_u, M_v, M_d behalten die oben angegebenen Werthe, und es ergeben sich daher, wenn der Reihe nach $X = H$, $X = M_1$, $X = M_2$ gesetzt wird, die Bedingungen:

$$\text{(I)}\quad 0 = \int\frac{\mathfrak{N}}{EF}\,d\varphi - r\int\frac{M_u}{EZ}(1 - \cos\varphi)\,d\varphi$$

$$\text{(II)}\quad 0=\int\frac{\mathfrak{N}}{EF}\frac{d\varphi}{r}-\int\frac{M_u}{EZ}d\varphi$$

$$\text{(III)}\quad 0=\int\frac{M_v}{EJ}\cos\varphi\, d\varphi-\int\frac{M_d}{GJ_p}\sin\varphi\, d\varphi,$$

in denen alle Integrale zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen sind.

Für den Fall, dass alle Lasten, die theils senkrecht zur Stabebene, theils in dieser Ebene wirken mögen, in Punkten der Stabachse angreifen und der Querschnitt des Stabes, desgl. E und G konstant sind, lässt sich Gleich. III noch wie folgt vereinfachen.

An einem Stabstücke ds wirken, um die Tangente $T_1 T_1$ drehend, die Momente $M_v d\varphi$ (gewonnen durch Zusammensetzung der auf die Endquerschnitte des Stabstückes wirkenden Momente M_v und $M_v + dM_v$) und dM_d (Unterschied zwischen den auf jene Endquerschnitte wirkenden Drehungsmomenten), und es erfordert das Gleichgewicht das Bestehen der Beziehung:

$$M_v d\varphi + dM_d = 0.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der durch theilweise Integration gefolgerten:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} M_d \sin\varphi\, d\varphi = -\Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} M_d\cos\varphi + \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\varphi\, dM_d$$

und beachtet, dass $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ beziehungsweise liefern: $M_d = 0$ (wegen der Symmetrie des Belastungszustandes) und $\cos\varphi = 0$, so erhält man

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} M_d \sin\varphi\, d\varphi = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} M_v\cos\varphi\, d\varphi,$$

und es geht deshalb (bei konstantem E, J, G, J_p) Gleich. III über in

$$\text{(IIIa)}\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} M_v\cos\varphi\, d\varphi = 0;$$

sie gilt für Stäbe mit beliebig geformtem, jedoch in Bezug auf die v-Achse symmetrischem und konstantem Querschnitte.

§ 24.

Gesetze für beliebige isotrope, feste Körper.

1) Arbeitsbedingungen. Im Inneren eines festen Körpers, dessen äussere und innere Kräfte mit einander im Gleichgewichte sein mögen, sei ein Parallelepipedum abgegrenzt, dessen Kanten den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems parallel sind und die anfänglichen Längen dx, dy, dz haben.

Die Spannung in der zur x-Achse senkrechten, den Punkt (x, y, z) enthaltenden Seitenfläche $dydz$ sei in die Seitenspannungen

σ_x, parallel der x-Achse und positiv, wenn im Sinne von $(-x)$ wirkend,
τ_{xy}, „ „ y-Achse „ „ „ „ „ „ $(-y)$ „ ,
τ_{xz}, „ „ z-Achse „ „ „ „ „ „ $(-z)$ „ ,

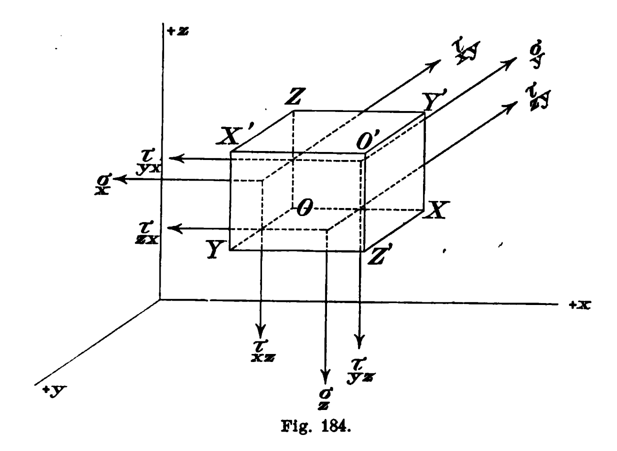


Fig. 184.

zerlegt, und in gleicher Weise mögen die Spannungen in den dem Punkte O anliegenden Seitenflächen $dz dx$ und $dx dy$ durch ihre Seitenspannungen

$$\sigma_y, \quad \tau_{yz}, \quad \tau_{yx},$$
$$\sigma_z, \quad \tau_{zx}, \quad \tau_{zy}$$

gegeben werden. Die σ sind Zug- oder Druckspannungen, die τ Schubspannungen.

Wird die Momentensumme aller auf das Parallelepipedum $dx dy dz$ wirkenden Kräfte in Bezug auf die der y-Achse parallele Schwerachse des Körpertheilchens gleich Null gesetzt und hierbei davon abgegesehen, dass sich die Spannungen in gegenüberliegenden Seitenflächen um Differentiale unterscheiden, weil die Berücksichtigung dieser Unterschiede zu unendlich kleinen Grössen der vierten Ordnung führen würde, welche gegen die der dritten Ordnung verschwinden, so erhält man (mit Hinweis

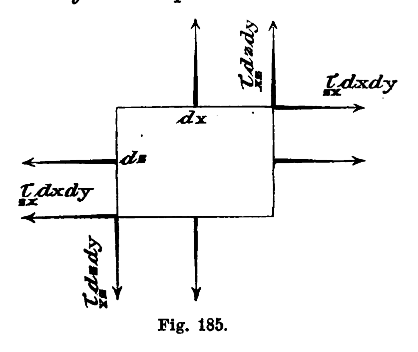


Fig. 185.

auf Fig. 185, in der die Projektion des Parallelepipedums auf die (zx)-Ebene dargestellt ist) die Gleichung:

$$(\tau_{zx} dx dy)\, dz = (\tau_{xz} dy dz)\, dx,$$

und hieraus und aus ähnlichen Momentengleichungen für die der x-Achse und z-Achse parallelen Schwerachsen des Körpertheilchens folgt

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx},$$

weshalb die kürzere Bezeichnung eingeführt werden soll:

$$\tau_x = \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_y = \tau_{zx} = \tau_{xz}; \quad \tau_z = \tau_{xy} = \tau_{yx},$$

wobei zu merken ist, dass

$$\tau_x \perp dx, \quad \tau_y \perp dy, \quad \tau_z \perp dz.$$

Aendern sich die anfänglichen Längen dx, dy, dz um Strecken Δdx, Δdy, Δdz, so leisten die von den Spannungen σ herrührenden Kräfte $\sigma_x dy dz$, $\sigma_y dz dx$, $\sigma_z dx dy$ die virtuelle Arbeit

$$dA_v = \sigma_x dy dz \,\Delta dx + \sigma_y dz dx \,\Delta dy + \sigma_z dx dy \,\Delta dz$$
$$= \left(\sigma_x \frac{\Delta dx}{dx} + \sigma_y \frac{\Delta dy}{dy} + \sigma_z \frac{\Delta dz}{dz}\right) dx dy dz$$

und hierfür kann, wenn die in der Folge Dehnungen genannten Verlängerungs-Verhältnisse mit

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}, \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$

bezeichnet werden und der Inhalt des Körpertheilchens $dx dy dz = dV$ gesetzt wird, geschrieben werden

$$dA_v = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z)\, dV.$$

Gleichzeitig mit den Dehnungen entstehen Winkeländerungen, und es sei, mit Bezugnahme auf Fig. 117:

γ_x die Aenderung des Winkels YOZ,
γ_y „ „ „ „ ZOX,
γ_z „ „ „ „ XOY.

Man nennt γ_x, γ_y, γ_z die Gleitungen im Punkte xyz; sie seien positiv oder negativ, je nachdem sie Verkleinerungen oder Vergrösserungen der Winkel YOZ, ZOX, XOY vorstellen.

In Folge der Aenderung des Winkels YOZ um γ_x verschiebt sich die Fläche YO' im Sinne OZ gegen die Fläche OY' um $\gamma_x dy$, wobei die in YO' und senkrecht zu dx wirksame Schubkraft $\tau_x dx dz$ die virtuelle Arbeit $\tau_x dx dz \gamma_x dy$ leistet, oder es verschiebt sich die Fläche ZO' im Sinne OY gegen die Fläche OZ' um die Strecke $\gamma_x dz$, bei welcher Bewegung die in ZO' und senkrecht zu dx wirkende Schubkraft $\tau_x dx dy$ die Arbeit $\tau_x dx dy \gamma_x dz$ verrichtet. In beiden Fällen entsteht die virtuelle Formänderungs-Arbeit:

$$dA_v = \tau_x \gamma_x dx dy dz = \tau_x \gamma_x dV,$$

und ebenso ergeben sich die den Winkeländerungen γ_y und γ_z entsprechenden virtuellen Arbeiten

$$\tau_y \gamma_y dV \text{ und } \tau_z \gamma_z dV,$$

so dass die gesammte virtuelle Formänderungs-Arbeit der an den Seitenflächen des Parallelepipedums angreifenden Kräfte gleich

$$(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z)\, dV$$

wird und diejenige sämmtlicher inneren Kräfte des Körpers:

$$(141) \quad A_v = \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z)\, dV.$$

Setzt man nun A_v gleich der von den äusseren Kräften geleisteten virtuellen Arbeit, so erhält man die Gleichung

(142) $\Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c = \int(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_x\gamma_x + \tau_y\gamma_y + \tau_z\gamma_z)\,dV$;
sie gilt für beliebige durch einander bedingte äussere und innere Verschiebungen δ, Δc, ε_x, ε_y, ε_z, γ_x, γ_y, γ_z, wenn diese nur klein genug sind, um als verschwindende Grössen aufgefasst werden zu dürfen. Zu den äusseren Kräften gehören ausser den in Punkten der Oberfläche angreifenden Kräften, die auf die Massentheilchen wirkenden (z. B. die Erdanziehung, Ergänzungskräfte der relativen Bewegung) und, wenn Theile des Körpers auf einander reiben, die an den Berührungsstellen wirksamen Reibungswiderstände.

Nehmen wir nun an, es sei geglückt, die nach bestimmten Richtungen wirkenden Seitenkräfte C der Stützenwiderstände, sowie die Spannungen σ und τ in der Form

$$\begin{aligned}
C &= C_0 + C'X' + C''X'' + C'''X''' + \dots \\
\sigma_x &= \sigma_{x0} + \sigma_x'X' + \sigma_x''X'' + \sigma_x'''X''' + \dots \\
\sigma_y &= \sigma_{y0} + \sigma_y'X' + \sigma_y''X'' + \sigma_y'''X''' + \dots \\
\sigma_z &= \sigma_{z0} + \sigma_z'X' + \sigma_z''X'' + \sigma_z'''X''' + \dots \\
\tau_x &= \tau_{x0} + \tau_x'X' + \tau_x''X'' + \tau_x'''X''' + \dots \\
\tau_y &= \tau_{y0} + \tau_y'X' + \tau_y''X'' + \tau_y'''X''' + \dots \\
\tau_z &= \tau_{z0} + \tau_z'X' + \tau_z''X'' + \tau_z'''X''' + \dots
\end{aligned}$$

als geradlinige Funktionen der gegebenen Lasten P und gewisser, statisch nicht bestimmbarer Grössen X herzustellen, wobei nur die mit dem Zeiger 0 behafteten Werthe von P abhängen sollen, und wenden die obige Arbeitsgleichung der Reihe nach auf die früher erklärten Zustände $X' = 1$, $X'' = 1, \dots$ an, so ergeben sich, da die Kräfte C' mit den Spannungen σ' und τ', die C'' mit den σ'' und τ'' im Gleichgewichte sind, die bei gegebenen Δc, ε_x, ε_y, ε_z, γ_x, γ_y, γ_z zur Berechnung der X ausreichenden Bedingungen

$$(143)\quad \begin{cases}
\Sigma C'\Delta c = \int(\sigma_x'\varepsilon_x + \sigma_y'\varepsilon_y + \sigma_z'\varepsilon_z + \tau_x'\gamma_x + \tau_y'\gamma_y + \tau_z'\gamma_z)\,dV \\
\Sigma C''\Delta c = \int(\sigma_x''\varepsilon_x + \sigma_y''\varepsilon_y + \sigma_z''\varepsilon_z + \tau_x''\gamma_x + \tau_y''\gamma_y + \tau_z''\gamma_z)\,dV \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots ;
\end{cases}$$

dieselben lassen sich auch durch die eine Gleichung:

$$(144)\quad L = \int\left(\varepsilon_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial X} + \varepsilon_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial X} + \varepsilon_z\frac{\partial\sigma_z}{\partial X} + \gamma_x\frac{\partial\tau_x}{\partial X} + \gamma_y\frac{\partial\tau_y}{\partial X} + \gamma_z\frac{\partial\tau_z}{\partial X}\right)dV$$

ersetzen, in welcher X irgend eine statisch nicht bestimmbare Grösse und L die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand $X = 1$ bedeutet, während die Differentialquotienten $\frac{\partial\sigma}{\partial X}$ und $\frac{\partial\tau}{\partial X}$ die Spannungen σ und τ für jenen Zustand vorstellen.

Die Verschiebung δ_m des Angriffspunktes m einer Last P_m wird

$$(145)\quad \delta_m = \int(\bar\sigma_x\varepsilon_x + \bar\sigma_y\varepsilon_y + \bar\sigma_z\varepsilon_z + \bar\tau_x\gamma_x + \bar\tau_y\gamma_y + \bar\tau_z\gamma_z)\,dV - \Sigma\bar C\Delta c,$$

wobei $\bar\sigma$, $\bar\tau$ und $\bar C$ diejenigen Spannungen und Auflagerkräfte sind,

welche mit einer Last $P_m = 1$ im Gleichgewichte sind. Man darf hierfür auch setzen

$$(146) \quad \delta_m = \int\left(\varepsilon_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial P_m} + \varepsilon_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial P_m} + \varepsilon_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial P_m} + \gamma_x \frac{\partial \tau_x}{\partial P_m} + \gamma_y \frac{\partial \tau_y}{\partial P_m} + \gamma_z \frac{\partial \tau_z}{\partial P_m}\right) dV - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c,$$

welche Gleichung durch theilweise Differentiation der Arbeitsgleichung nach der Last P_m, bei als Konstanten betrachteten willkürlichen Formänderungen, δ, Δc, ε_x, ε_y, ε_z, γ_x, γ_y, γ_z gewonnen wird.

2) **Einführung der durch Spannungen und Temperaturänderungen verursachten Dehnungen und Gleitungen.** Wir wenden jetzt die Gleichungen (143) bis (146) auf die wirklichen Dehnungen und Gleitungen an und beschränken uns hierbei auf den isotropen (d. h. in allen Punkten gleich beschaffenen) festen Körper mit spannungslosem Anfangszustande.

Die Seite dx des betrachteten Parallelepipedums erleidet, wenn die Spannung σ_x allein wirkt, die Dehnung $\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}$, während eine Aenderung der Anfangs-Temperatur um t erzeugt: $\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon t$ und in Folge von σ_y und σ_z entsteht: $\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{\sigma_y + \sigma_z}{mE}$, wobei $\frac{1}{m}$ den Koefficienten der Querdehnung ($= \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ für Schweiss- und Flusseisen) bedeutet. Beim Zusammenwirken aller Ursachen ergiebt sich die Dehnung

$$(147) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{mE} + \varepsilon t \text{ und ebenso} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{mE} + \varepsilon t, \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{mE} + \varepsilon t, \end{cases}$$

während die nur von den Schubspannungen abhängigen Gleitungen

$$(148) \quad \gamma_x = \frac{\tau_x}{G}, \quad \gamma_y = \frac{\tau_y}{G}, \quad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$$

sind, wobei

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

den Schub-Elasticitätsmodul bedeutet.

Die Gleichungen (144) und (146) gehen nach Einsetzen der vorstehenden Werthe der Dehnungen und Gleitungen über in

$$(149) \quad L = \frac{\partial A_i}{\partial X} \text{ und}$$

$$(150)\quad \delta_m = \frac{\partial A_i}{\partial P_m} - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c, \text{ wobei}$$

$$(151)\quad A_i = \frac{1}{2}\int\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m}(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)\right]\frac{dV}{E}$$
$$+ \frac{1}{2}\int(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)\frac{dV}{G} + \int(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\,\varepsilon t\,dV.$$

Im Falle $t = 0$ ergeben sich die Gesetze:

$$(152)\quad L = \frac{\partial A}{\partial X} \text{ und}$$

$$(153)\quad \delta_m = \frac{\partial A}{\partial P_m} - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c, \text{ wobei}$$

$$(154)\quad A = \frac{1}{2}\int\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m}(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)\right]\frac{dV}{E}$$
$$+ \frac{1}{2}\int(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)\frac{dV}{G}.$$

A bedeutet die wirkliche Formänderungsarbeit, wie aus der folgenden Entwickelung hervorgeht.

Die Arbeit, welche die an den Körpertheilchen wirkenden Kräfte leisten, während die im Entstehen begriffenen Dehnungen und Gleitungen um die Werthe $d\varepsilon_x$, $d\varepsilon_y$, $d\varepsilon_z$, $d\gamma_x$, $d\gamma_y$, $d\gamma_z$ zunehmen, ist nach den Entwickelungen unter 1):

$$(\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z)\,dV,$$

worein zu setzen

$$d\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[d\sigma_x - \frac{1}{m}d\sigma_y - \frac{1}{m}d\sigma_z\right],$$
$$d\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[d\sigma_y - \frac{1}{m}d\sigma_z - \frac{1}{m}d\sigma_x\right],$$
$$d\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[d\sigma_z - \frac{1}{m}d\sigma_x - \frac{1}{m}d\sigma_y\right], \text{ also}$$

$$\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_x d\sigma_x + \sigma_y d\sigma_y + \sigma_z d\sigma_z - \frac{1}{m}d(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)\right]$$

$$\text{und } d\gamma_x = \frac{1}{G}d\tau_x,\quad d\gamma_y = \frac{1}{G}d\tau_y,\quad d\gamma_z = \frac{1}{G}d\tau_z.$$

Integrirt man diesen Ausdruck bei von 0 aus wachsenden Spannungen, so erhält man für das Körpertheilchen die gesammte Formänderungsarbeit

$$dA = \frac{1}{E}\left[\frac{\sigma_x^2}{2} + \frac{\sigma_y^2}{2} + \frac{\sigma_z^2}{2} - \frac{1}{m}(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)\right] dV$$
$$+ \frac{1}{G}\left[\frac{\tau_x^2}{2} + \frac{\tau_y^2}{2} + \frac{\tau_z^2}{2}\right] dV,$$

und hieraus folgt dann für den ganzen Körper der durch die Gleich. (154) gegebene Arbeitswerth A.*)

Im Falle $t = 0$ und $L = 0$ entstehen aus (152) und (153) die Castigliano'schen Sätze:

1) Die statisch nicht bestimmbaren Grössen X machen die Formänderungsarbeit A, welche als Funktion der zuerst unabhängig veränderlich angenommenen Werthe X darzustellen ist, zu einem Minimum.

2) Die Verschiebung des Angriffspunktes m einer Last P_m im Sinne von P_m ist gleich der nach P_m gebildeten theilweisen Abgeleiteten der Formänderungsarbeit A.

Bei der Ausführung der durch die Gleichungen 150 und 153 vorgeschriebenen Differentiationen dürfen sämmtliche Grössen X als Konstanten aufgefasst werden. Man gehe gewissermassen von dem allgemeineren Falle willkürlicher Werthe X aus, wende also die Gleich. 150 und 153 (wie in den Abschnitten I und II) auf den statisch bestimmten Hauptträger an. Die Auffassung der X als Funktionen der Lasten P führt, wenn die Bedingungsgleichungen 148 berücksichtigt werden, zu denselben Ergebnissen; der (übrigens überflüssige) Beweis hierfür kann ähnlich geführt werden wie beim Fachwerke. Vergl. Seite 68.

3) Der Maxwell'sche Satz. Wir nehmen an, dass die dem spannungslosen Anfangszustande entsprechende Temperatur ungeändert bleibt ($t = 0$) und die Auflagerwiderstände bei eintretenden elastischen Verschiebungen keine Arbeit leisten ($\Delta c = 0$). Den von beliebigen Belastungen P_m ergriffenen Körper denken wir durch drei einander rechtwinklig schneidende Flächenschaaren in unendlich kleine Theilchen zerlegt, in deren Seitenflächen nur Normalspannungen auftreten, welche dann Hauptspannungen heissen und mit σ_1', σ_2', σ_3' bezeichnet werden sollen. Die entsprechenden Dehnungen sind, wegen $t = 0$

$$(155)\quad \begin{cases} \varepsilon_1' = \left[\sigma_1' - \frac{1}{m}(\sigma_2' + \sigma_3')\right]\frac{1}{E} \\ \varepsilon_2' = \left[\sigma_2' - \frac{1}{m}(\sigma_3' + \sigma_1')\right]\frac{1}{E} \\ \varepsilon_3' = \left[\sigma_3' - \frac{1}{m}(\sigma_1' + \sigma_2')\right]\frac{1}{E}; \end{cases}$$

die Gleitungen sind $= 0$.

*) Führt man in Gleich. 142 die wirklichen Werthe von ε_x, ε_y, ε_z, γ_x, γ^y,

Jetzt ersetzen wir die Belastungen P_m durch andere Belastungen P_n, behalten aber die vorhin angenommene Zerlegung des Körpers bei. Es treten dann Normalspannungen σ_1'', σ_2'', σ_3''' auf, und erzeugen Dehnungen:

$$(156)\quad \begin{cases} \varepsilon_1''=\left[\sigma_1''-\frac{1}{m}(\sigma_2''+\sigma_3'')\right]\frac{1}{E} \\ \varepsilon_2''=\left[\sigma_2''-\frac{1}{m}(\sigma_3''+\sigma_1'')\right]\frac{1}{E} \\ \varepsilon_3''=\left[\sigma_3''-\frac{1}{m}(\sigma_1''+\sigma_2'')\right]\frac{1}{E}. \end{cases}$$

Ausserdem werden durch die P_n Schubspannungen τ'' und Gleitungen γ'' hervorgerufen.

Bezeichnen wir nun mit (δ_{mn}) den Weg irgend einer Belastung P_m für den Fall, dass auf den Körper nur die Belastungen P_n wirken**), und mit (δ_{nm}) den Weg irgend einer Belastung P_n infolge ausschliesslicher Wirkung der P_m, und schreiben wir die Arbeitsgleichung zuerst an,

für den Belastungszustand (P_m) und den hiervon unabhängigen, den Belastungen P_n entsprechenden Verschiebungszustand,

sodann

für den Belastungszustand (P_n) und den hiervon unabhängigen, den Belastungen P_m entsprechenden Verschiebungszustand,

so erhalten wir, da die Stützenwiderstände der Voraussetzung gemäss keine Arbeit verrichten, die Gleichungen:

$$\Sigma P_m(\delta_{mn}) = \int(\sigma_1'\varepsilon_1''+\sigma_2'\varepsilon_2''+\sigma_3'\varepsilon_3'')\,dV$$
$$\Sigma P_n(\delta_{nm}) = \int(\sigma_1''\varepsilon' +\sigma_2''\varepsilon_2'+\sigma_3''\varepsilon_3')\,dV,$$

bei deren Aufstellung zu beachten ist, dass den Gleitungen γ'' die Schubspannungen $\tau'=0$ gegenüberstehen und den Schubspannungen τ'' die Gleitungen $\gamma'=0$.

Mit Hilfe der Gleichungen 155 und 156 lässt sich nun leicht nachweisen, dass

$$\sigma_1'\varepsilon_1''+\sigma_2'\varepsilon_2''+\sigma_3'\varepsilon_3''=\sigma_1''\varepsilon_1'+\sigma_2''\varepsilon_2'+\sigma_3''\varepsilon_3'$$

ist und deshalb auch

$$\Sigma P_m(\delta_{mn}) = \Sigma P_n(\delta_{nm}).\text{***})$$

γ_z ein, so erhält man für den Zustand $t=0$: $\Sigma P\delta+\Sigma C\Delta c = A_v = 2A$. Bezeichnet man also mit Q irgend eine äussere Kraft und mit r die Verschiebung ihres Angriffspunktes im Sinne von Q, so besteht die Bezeichnung:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma Qr = A,$$

welche das Clapeyron'sche Gesetz heisst.

**) Wirkt nur eine Belastung P_n und hat diese die Grösse eins, so geht (δ_{mn}) über in δ_{mn}. Vergl. Seite 53.

***) In dieser allgemeinen Form wurde der Satz zuerst von Betti bewiesen.

Hieraus folgt aber, als besonderer Fall

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}.$$

§ 25.

Schubfestigkeit.

Im Anschluss an die Entwickelungen des § 24 soll der Einfluss der durch die Querkräfte Q (vgl. Seite 78) hervorgerufenen Schubspannungen τ auf die Formänderungen und statisch nicht bestimmbaren Grössen von auf Biegungsfestigkeit beanspruchten geraden Stäben untersucht werden.

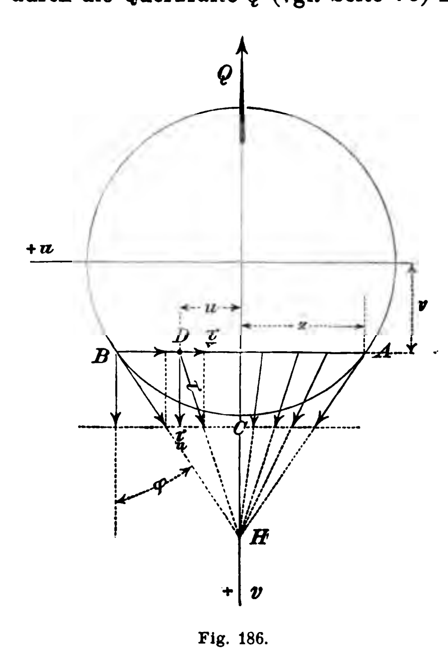


Fig. 186.

1) Formänderungs-Arbeit der Schubkräfte. Ist die Kräfteebene eine Symmetrieebene des Stabes (welcher Fall hier ausschliesslich betrachtet werden möge), so wird durch die Querkraft Q in irgend einem Punkte D des Querschnitts eine Schubspannung τ hervorgerufen, welche die v-Achse in einem Punkte H schneidet, dessen Lage erhalten wird, indem man durch D die der u-Achse parallele Sehne AB zieht und in B eine Tangente BH an den Querschnittsumfang legt. Fig. 186. Von den beiden Seitenspannungen τ_v und τ_u, in welche sich τ zerlegen lässt und die beziehungsweise senkrecht zur v-Achse und senkrecht zur u-Achse sind, folgt τ_u bekanntlich dem Gesetze:

$$\tau_u = \frac{QS}{2zJ},$$

wenn $2z$ die Länge der Sehne AB,

S das auf die u-Achse bezogene statische Moment des einen der beiden durch die Sehne AB begrenzten Querschnittstheile (z. B. des Theiles ACB) und

J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts in Bezug auf die u-Achse

bedeuten. Es ist somit τ_u unabhängig von u und gleich gross für alle

auf der Sehne AB gelegenen Querschnittspunkte, und es folgt, wenn φ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente BH mit der v Achse einschliesst, für den Punkt B: $\tau_v = \tau_u \operatorname{tg} \varphi$ und für den Punkt D:

$$\tau_v = \tau_u \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{u}{z}.$$

Der von den Schubspannungen abhängige Theil der Formänderungs-Arbeit ist, bei innerhalb des Querschnitts konstantem G und wenn das Element der Stabachse $= dx$ gesetzt wird,

$$A = \frac{1}{2}\int(\tau_u^2 + \tau_v^2)\frac{dV}{G} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{G}\iint(\tau_u^2 + \tau_v^2)\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{G}\iint\tau_u^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\varphi\frac{u^2}{z^2}\right)du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{G}\int\tau_u^2 dv\int_{-z}^{+z}\left(1 + \operatorname{tg}^2\varphi\frac{u^2}{z^2}\right)du, \text{ d. i.}$$

$$(155)\qquad A = \int\frac{dx}{G}\int\tau_u^2\left(1 + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\varphi\right)z\,dv.$$

Hiernach ergiebt sich beispielsweise für den Rechteckquerschnitt, dessen Breite b und dessen Höhe $h = 2e$ sein möge, wegen

$$\tau_u = \frac{3}{2}\frac{Q}{F}\left(1 - \frac{v^2}{e^2}\right),\quad z = \frac{1}{2}b \text{ und } \varphi = 0:$$

$$A = \int\frac{dx}{G}\frac{9}{4}\frac{Q^2}{F^2}\frac{b}{2}\int_{-e}^{+e}\left(1 - \frac{v^2}{e^2}\right)^2 dv,$$

und, da $\int_{-e}^{+e}\left(1 - \frac{v^2}{e^2}\right)^2 dv = \frac{16}{15}e = \frac{8F}{15b}$ ist,

$$(156)\qquad A = \frac{3}{5}\int\frac{Q^2 dx}{GF}.$$

Für den Kreisquerschnitt vom Radius e ist

$$\tau_u = \frac{4}{3}\frac{Q}{F}\cos^2\varphi,\quad z = e\cos\varphi,\quad v = e\sin\varphi,$$

$$A = \int\frac{dx}{G}\frac{16}{9}\frac{Q^2}{F^2}e^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\left(1 + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\varphi\right)\cos^2\varphi\,d\varphi$$

und wegen

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\left(1+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\varphi\right)\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^6\varphi+\cos^4\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{2}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$$

$$(157)\quad A = \frac{16}{27}\int\frac{Q^2 dx}{GF}.$$

Allgemein darf gesetzt werden:

$$A = \beta\int\frac{Q^2 dx}{2GF},$$

wobei β eine von der Gestalt des Querschnittes abhängige Zahl bedeutet. Für das Rechteck ist $\beta = \frac{6}{5}$ und für den Kreis: $\beta = \frac{32}{27}$.

2) Arbeitsgleichung zur Berechnung statisch nicht bestimmbarer Grössen. Ermittelung von Verschiebungen δ. Die auf Seite 87 mit Hilfe des Satzes

$$(158)\quad L = \frac{\partial A_i}{\partial X}$$

abgeleitete Bedingung

$$L = \int\frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial X}dx + \int\frac{M}{EJ}\frac{\partial M}{\partial X}dx + \int\varepsilon t_0\frac{\partial N}{\partial X}dx + \int\varepsilon\frac{\Delta t}{h}\frac{\partial M}{\partial X}dx$$

geht, wenn der Einfluss der durch die Querkräfte Q erzeugten Schubspannungen berücksichtigt werden soll, über in

$$(159)\quad L = \beta\int\frac{Q}{GF}\frac{\partial Q}{\partial X}dx + \int\frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial X}dx + \int\frac{M}{EJ}\frac{\partial M}{\partial X}dx + \int\varepsilon t_0\frac{\partial N}{\partial X}dx + \int\varepsilon\frac{\Delta t}{h}\frac{\partial M}{\partial X}dx.$$

An Stelle der zur Berechnung von Verschiebungen abgeleiteten Gleich. (55) tritt die Beziehung

$$(160)\quad \delta_m = \beta\int\frac{Q}{GF}\frac{\partial Q}{\partial P_m}dx + \int\frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial P_m}dx + \int\frac{M}{EJ}\frac{\partial M}{\partial P_m}dx + \int\varepsilon t_0\frac{\partial N}{\partial P_m}dx + \int\varepsilon\frac{\Delta t}{h}\frac{\partial M}{\partial P_m}dx - \Sigma\frac{\partial C}{\partial P_m}dx.$$

Aufgabe. Ein wagerechter Balken ist gleichmässig mit p für die Längeneinheit belastet, bei B wagerecht eingespannt, bei A frei aufliegend. Gesucht ist der senkrechte Stützenwiderstand X bei A. Fig. 76. Die

Stützen seien starr ($L = 0$), und eine Erhöhung der Anfangstemperatur habe nicht stattgefunden ($t = 0$).

Wegen $N = 0$ ergiebt sich die Bedingung

$$0 = \beta \int_0^l \frac{Q}{GF} \frac{\partial Q}{\partial X} dx + \int_0^l \frac{\mathrm{M}}{EJ} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X} dx,$$

worein zu setzen:

$$Q = X - px, \quad \mathrm{M} = Xx - \frac{px^2}{2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = 1, \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial X} = x,$$

so dass, bei konstantem G, F, E, J entsteht:

$$0 = \beta \frac{J}{F} \frac{E}{G} \int_0^l (X - px)\, dx + \int_0^l \left(Xx^2 - \frac{px^3}{2}\right) dx = 0,$$

$$0 = \beta \frac{J}{F} \frac{E}{G} l \left(X - \frac{pl}{2}\right) + \frac{l^3}{3}\left(X - \frac{3pl}{3}\right) = 0,$$

woraus, wegen $\frac{E}{G} = \frac{2(m+1)}{m}$:

$$X = \frac{3pl}{8} \frac{1 + 8 \frac{J}{Fl^2} \frac{m+1}{m} \beta}{1 + 6 \frac{J}{Fl^2} \frac{m+1}{m} \beta}.$$

Ist der Balkenquerschnitt ein Rechteck (b, h), so ist $\beta = \frac{6}{5}$ und $\frac{J}{F} = \frac{h^2}{12}$, weshalb sich mit $m = 3$ ergiebt:

$$X = \frac{3pl}{8} \frac{1 + \frac{16}{15} \frac{h^2}{l^2}}{1 + \frac{4}{5} \frac{h^2}{l^2}}.$$

$\frac{h}{l} = \frac{1}{5}$ liefert z. B. $X = 1{,}01 \cdot \frac{3pl}{8}$, während die Vernachlässigung der Querkraft Q zu $X = \frac{3pl}{8}$ geführt hätte.

Anhang.

I. Entwickelung der Arbeitsgleichungen.

Obgleich das Gesetz der virtuellen Verschiebungen zu den bekanntesten Lehren der Mechanik gehört, dürfte eine Entwickelung der in diesem Buche benutzten Arbeitsgleichungen, welche dieses Gesetz für die betrachteten Fälle ausdrücken, manchem Leser erwünscht sein; sie möge deshalb hier gegeben werden, zuerst für das Fachwerk, sodann für einen beliebigen Körper.

1) **Das Fachwerk.** Wirken an den Endpunkten m und n eines Stabes von unveränderlicher Länge zwei entgegengesetzt gleiche, mit der Stabachse zusammenfallende Kräfte S, so ist die bei irgend einer Bewegung des Stabes von den beiden Kräften verrichtete Arbeitssumme gleich Null.

Um dies einzusehen, zerlege man jene Bewegung in eine fortschreitende und eine drehende und wähle für die letztere irgend einen Punkt der Stabachse (z. B. n_1) zum Drehpunkte, Fig. 187. Während des ersten Theiles der Ortsveränderung leisten die Kräfte S entgegengesetzt gleiche Arbeiten, die sich mithin tilgen, und während des zweiten verrichten sie, weil fortwährend durch den Drehpunkt gehend, überhaupt keine Arbeit. Dabei ist es gleichgiltig, ob die Stabkräfte S konstant sind oder sich stetig ändern; im letzteren Falle dürfen sie innerhalb jedes unendlich kleinen Zeittheilchens als konstant betrachtet werden.

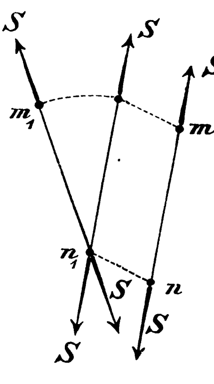


Fig. 187.

Wächst die anfängliche Länge s des Stabes während jener Bewegung um Δs, und bedeutet für irgend ein Theilchen der Bewegungsdauer: S_x den augenblicklichen Werth der Stabkraft und $d\Delta s$ die Aenderung der Stablänge, so ist die Arbeitssumme für dieses Zeittheilchen $= S_x d\Delta s$ und für die ganze Bewegungsdauer:

$$A = \int_{S_a}^{S} S_x d\Delta s,$$

wobei S_a den anfänglichen und S den schliesslichen Werth der Stabkraft vorstellt.

Der Ausdruck A giebt hiernach die Arbeitssumme an, welche die an den Endpunkten eines elastischen Stabes mn eines Fachwerks wirkenden Spannkräfte verrichten, sobald irgend welche Ursachen die Knotenpunkte m, n in die Lagen m_1, n_1 (wobei $\overline{m_1 n_1} = s + \Delta s$ ist) verschieben, während die Stabkräfte von S_a bis S wachsen.

Der wirklichen Arbeit A wollen wir nun diejenige Arbeit $A_v = S\Delta s$ gegenüberstellen, welche die Stabkräfte in dem nur gedachten Falle verrichten, dass sie während der ganzen Dauer der Bewegung ihre Endwerthe S besitzen, und dass an Stelle der wirklichen Verschiebungen der Knotenpunkte irgend welche willkürliche Verschiebungen treten, die wir uns zwar als möglich vorstellen können, die aber in Wirklichkeit nicht einzutreten brauchen und virtuelle Verschiebungen genannt werden. Die Arbeit A_v heisst die virtuelle Arbeit der auf den Stab s wirkenden Spannkräfte S. Für das ganze Fachwerk ergiebt sich

$$A_v = \Sigma S \Delta s,$$

welche Summe über sämmtliche Stäbe auszudehnen ist.

Wir betrachten jetzt die Spannkräfte S als Kräfte, die an den Knotenpunkten angreifen, also entgegengesetzte Richtung wie vorhin haben und die virtuelle Arbeit: $-\Sigma S\Delta s$ leisten; sodann setzen wir voraus, dass an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht besteht und keine Kraft unendlich gross wird. Erfahren die Knotenpunkte irgend welche unendlich kleine Verschiebungen, so ist die Arbeitssumme für sämmtliche Kräfte gleich Null, weil für jeden Knotenpunkt die Mittelkraft aus allen daselbst angreifenden Kräften zu Anfang gleich Null ist und während jener Elementarbewegung bis auf eine verschwindend kleine Grösse den Werth Null behält.

Bedeutet also für irgend einen Knotenpunkt m: Q_m die Mittelkraft aus den daselbst angreifenden äusseren Kräften und r_m die Projektion der Verschiebung des Punktes m auf die Kraft Q_m (positiv, wenn im Sinne von Q_m erfolgend), so ist die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte $= \Sigma Q_m r_m$, und es folgt:

$$\Sigma Q_m r_m - \Sigma S \Delta s = 0$$

und hieraus:

$$\Sigma Q_m r_m = \Sigma S \Delta s.$$

Diese Gleichung drückt das Gesetz aus:

*Für ein im Gleichgewichte befindliches Fachwerk ist die bei unendlich kleinen virtuellen Verschiebungen der Knotenpunkte von den äusseren Kräften verrichtete virtuelle Arbeit ebenso gross wie die virtuelle Arbeit der Stabkräfte S.**)

---

*) Die Arbeit $\Sigma S\Delta s$, welche man aus den Aenderungen der Stablängen berechnen kann, ohne die anfänglichen und schliesslichen Lagen der Knoten-

Scheiden wir die äusseren Kräfte ganz allgemein in Lasten und Auflagerkräfte und führen die auf Seite 7 erklärten Bezeichnungen P, C, δ, Δc ein, so erhalten wir $\Sigma Qr = \Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c$, und es entsteht die Gleichung

$$\text{(I)} \quad \Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c = \Sigma S\Delta s,$$

welche wir die Arbeitsgleichung des Fachwerks genannt und zum Ausgangspunkte unserer Entwickelungen gemacht haben.

Hinsichtlich der auf das Fachwerk wirkenden Kräfte wurde bei der Ableitung der Gleich. (I) nur vorausgesetzt, dass sie miteinander im Gleichgewichte sind. Hat man also die Spannkräfte S und Auflagerkräfte C eines statisch unbestimmten Fachwerks durch die Lasten P und durch gewisse statisch nicht bestimmbare Grössen X so ausgedrückt, dass die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind (vergl. Seite 4), so darf man bei Einsetzen der S und C in die Gleich. (I) den Grössen P und X willkürliche Werthe beilegen. Indem man nun diese Werthe verschiedenartig wählt, ist man im Stande, aus (I) beliebig viele Gleichungen zu folgern und erhält, sobald man diese nun auf die wirklichen Verschiebungen δ, Δc, Δs (die ja nur besondere Fälle von willkürlichen Verschiebungen sind) anwendet, eine genügende Anzahl von Beziehungen, um die wirklichen Grössen X berechnen und die wirkliche Formänderung des Fachwerkes feststellen zu können. Dabei wird allerdings vorausgesetzt, dass die wirklichen Verschiebungen klein genug sind, um als verschwindende Grössen aufgefasst werden zu dürfen.

2) **Beliebiger Körper.** Wir gehen von der Voraussetzung einer stetigen Erfüllung des Raumes durch die Materie aus, im Gegensatze zur Auffassung des Körpers als ein System von Massenpunkten, die zwar einander unendlich nahe liegen, immerhin aber durch Zwischenräume von einander getrennt sind, und denken uns an irgend einer Stelle ein unendlich kleines Körpertheilchen abgegrenzt, beispielsweise, um die Vorstellung zu erleichtern, ein Parallelepipedum. Die auf die Seitenflächen desselben wirkenden Kräfte sollen Flächenkräfte genannt und insbesondere als innere Kräfte oder Oberflächenkräfte bezeichnet werden, je nachdem die durch sie beanspruchten Flächen im Inneren des Körpers liegen oder zur Oberfläche gehören; ausser ihnen wird an dem Körpertheilchen im Allgemeinen noch eine auf die Masse desselben wirkende äussere Kraft angreifen, welche eine Massenkraft heisst (z. B. die Erdanziehung, Ergänzungskräfte der relativen Bewegung).

Bezüglich sämmtlicher Kräfte wird vorausgesetzt, dass sie endlich sind.

---

punkte zu kennen, wird auch die virtuelle Formänderungsarbeit des Fachwerks genannt.

Nehmen wir nun an, es erleide ein anfänglich im Gleichgewichte befindlicher Körper durch Hinzutreten äusserer Kräfte und durch Temperaturänderung eine Umgestaltung; dieselbe hört auf, sobald sich ein neuer Gleichgewichtszustand gebildet hat und bestehen bleibt; während ihrer Erzeugung werden die Flächenkräfte des betrachteten Körpertheilchens eine bestimmte Arbeitssumme verrichten, und von dieser ist besonders derjenige Theil von Wichtigkeit, der nur von der Formänderung des Körpertheilchens abhängt, der also verschwindet, wenn sich das Theilchen bewegt, ohne seine Gestalt zu ändern. Man nennt diesen Theil der Gesammtarbeit der Flächenkräfte die Formänderungsarbeit des Körpertheilchens; ihre Integration über den ganzen Körper liefert die Formänderungsarbeit des Körpers. Bei der Berechnung dieser Arbeit ist zu beachten, dass die Flächenkräfte, deren schliessliche Werthe wir ganz allgemein mit R bezeichnen wollen, sich im Verlaufe jener Umgestaltung ändern.

Denkt man sich hingegen die Flächenkräfte während der ganzen Dauer der Formänderung konstant und mit ihren Endwerthen R wirkend, bestimmt die von den Kräften R geleistete Formänderungsarbeit und ersetzt hierbei die wirkliche Formänderung durch eine willkürliche, die zwar als möglich gedacht werden kann, in Wirklichkeit aber nicht einzutreten braucht, so erhält man einen Ausdruck dA_v, welcher die virtuelle Formänderungs-Arbeit heisst, während jene willkürliche, mögliche Umgestaltung des Körpers eine virtuelle Formänderung genannt werden soll.

Um die im Vorstehenden erklärten Begriffe an einem Beispiele zu erläutern, betrachten wir ein unendlich kleines Parallelepipedum, welches an der Stelle x, y, z eines auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen Körpers abgegrenzt ist, und dessen den Koordinatenachsen parallele Kanten die Längen dx, dy, dz haben. Es mögen nur Normalspannungeu auftreten und zwar nur solche, die der (x, y)-Ebene parallel sind; sie seien stetige Funktionen der Koordinaten (Fig. 188). Ist dann die Normalspannung
für Fläche AB gleich σ_x (positiv im Sinne $-x$),
„ „ AD „ σ_y („ „ „ $-y$),
so ist die Normalspannung

Fig. 188.

für Fläche CD gleich $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ und

„ „ CB „ $\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$.

Diesen Spannungen entsprechen die Flächenkräfte:

$$R_1 = \sigma_x dy dz; \quad R_2 = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy dz;$$

$$R_3 = \sigma_y\, dz\, dx; \quad R_4 = \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) dz\, dx$$

und zwar seien dies die schliesslichen Werthe der Kräfte R.

Erleidet nun das Körpertheilchen im Sinne von x und y beziehungsweise die virtuellen Verschiebungen Δx und Δy, ohne dass sich hierbei die Gestalt des Theilchens ändert, so leisten die Kräfte R die Arbeit:

$$(R_2 - R_1)\,\Delta x + (R_4 - R_3)\,\Delta y = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\,\Delta y\right) d\,V,$$

unter $d\,V = dx\,dy\,dz$ den Inhalt des Körpertheilchens verstanden. Aendert sich während jener Bewegung: dx um $\Delta dx = \varepsilon_x dx$ (wobei $\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$ das Verlängerungsverhältniss der Kante dx bedeutet) und dy um $\Delta dy = \varepsilon_y dy$, so nimmt die vorhin ermittelte Arbeitssumme zu um die virtuelle Formänderungsarbeit $d\,A_v$, bei deren Berechnung R_2 ersetzt werden darf durch R_1 und R_4 durch R_3. Denn die Flächenkräfte für gegenüberliegende Seitenflächen des Körpertheilchens unterscheiden sich bei stetigen Spannungen nur um unendlich kleine Werthe, so dass in Folge der Gleichsetzung von R_2 und R_1, sowie von R_4 und R_3 nur verschwindende Grössen vierter Ordnung vernachlässigt werden.*) Mithin folgt:

$$d\,A_v = R_1\,\Delta dx + R_3\,\Delta dy = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y)\, d\,V,$$

und es ergiebt sich schliesslich die virtuelle Gesammtarbeit der Flächenkräfte:

$$d\,A_f = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\,\Delta y + \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y\right) d\,V.$$

Wir fassen jetzt eine unendlich kleine, virtuelle Formänderung eines im Gleichgewichte befindlichen Körpers und insbesondere die Bewegung und Umgestaltung eines Körpertheilchens ins Auge und bezeichnen die virtuelle Arbeit der auf dieses Körpertheilchen wirkenden Massenkraft mit $d\,A_m$, diejenige der Flächenkräfte mit $d\,A_f$. Letztere Arbeit besteht aus zwei Theilen; der eine, $d\,A_v$, hängt nur von der Umgestaltung des Körpertheilchens ab, der andere, nämlich $d\,A_f - d\,A_v$, von der Bewegung des Massenmittelpunktes und der Drehung des Körpertheilchens um diesen Punkt. Somit stellt $d\,A_m + d\,A_f - d\,A_v$ diejenige virtuelle Arbeit vor, welche sämmtliche auf das Körpertheilchen wirkenden Kräfte leisten, wenn dessen Bewegung ohne eine Formänderung vor sich geht. Diese Arbeit muss aber = Null sein, da die Mittelkraft der auf das Körpertheilchen wirkenden Kräfte während der ganzen Dauer der angenommenen Elementarbewegung, bis auf eine verschwindende Grösse, den anfänglichen Werth Null beibehält.

Es folgt somit $d\,A_m + d\,A_f = d\,A_v$ und, wenn entsprechende Gleichungen für sämmtliche Körpertheilchen anfgestellt und hierauf addirt werden,

$$\text{(II)} \quad A_m + A_f = A_v.$$

---

*) Bei unstetigen Spannungen muss der Körper in Theile zerlegt werden, innerhalb welcher alle Spannungen stetig sind; die Werthe $d\,A_v$ werden für die einzelnen Theile gesondert integrirt und schliesslich addirt.

Da sich nun in dem Ausdrucke A_f die Arbeiten der inneren Flächenkräfte gegenseitig tilgen, weil auf die Flächen, in denen aneinandergrenzende Körpertheilchen zusammenhängen, bei gleichen Verschiebungen entgegengesetzt gleiche Kräfte wirken, so leuchtet ein, dass A_f die virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte, mithin $A_f + A_m$ die virtuelle Arbeit sämmtlicher äusseren Kräfte vorstellt, und es drückt deshalb die Gleichung II das Gesetz aus:

Bei einer verschwindend kleinen virtuellen Formänderung eines im Gleichgewichte befindlichen Körpers ist die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte gleich der virtuellen Formänderungsarbeit.

Die Ableitung dieses Satzes nimmt an, dass alle anfänglich sich deckenden Seitenflächen von aneinandergrenzenden Körpertheilchen auch während des ganzen Verlaufes der Formänderung sich decken, weil nur dann die Arbeiten der auf diese Flächen wirkenden Kräfte sich aufheben. Besteht nun der betrachtete Körper aus mehreren einander berührenden Theilen, von denen jeder einzelne der obigen Voraussetzung entspricht, und finden gegenseitige Verschiebungen von anfänglich zusammenliegenden Berührungsflächen je zweier Theile statt, so müssen, wenn das bewiesene Gesetz giltig bleiben soll, alle diese Flächen der Oberfläche zugezählt werden; d. h. es sind die auf diese Flächen wirkenden Kräfte, soweit sich ihre Arbeiten nicht tilgen, zu den äusseren Kräften zu rechnen. In allen Fällen der Anwendung genügt die Festsetzung, dass bei aufeinander reibenden Theilen eines Körpers die an den Berührungsstellen wirkenden Reibungswiderstände als äussere Kräfte aufzufassen sind.

Wird der betrachtete Körper durch fremde Körper gestützt, so nennen wir die Drücke, welche die letzteren auf den ersteren ausüben, Stützenwiderstände oder Auflagerkräfte. Alle übrigen äusseren Kräfte mögen Lasten heissen. Es ergiebt sich dann, mit den auf Seite 16 erklärten Bezeichnungen P, C, δ, Δc, die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte $= \Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c$, und es entsteht die Arbeitsgleichung

$$\text{(III)} \quad \Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c = A_v,$$

welche in den Abschnitten II und III in derselben Weise wie die Arbeitsgleichung des Fachwerks zur Berechnung von statisch nicht bestimmbaren Grössen und von Verschiebungen beliebiger Punkte benutzt worden ist.

II. Geschichtliche Anmerkungen und Angabe einschlägiger Schriften.

Die ersten Anwendungen des Satzes von der Arbeit auf Aufgaben der Festigkeitslehre finden sich bei Clapeyron, welcher die von

Navier*) aus dem Principe der virtuellen Verschiebungen gefolgerte allgemeine und einzige Bedingung für das Gleichgewicht zwischen den inneren und äusseren Kräften eines elastischen Körpers anwendet und in diese an Stelle der virtuellen die wirklichen elastischen Verschiebungen einführt. Indem er hierbei die Annahme eines spannungslosen Anfangszustandes macht und voraussetzt, dass in jedem Punkte des Körpers die anfängliche Temperatur herrscht, erhält er die von ihm später zur Berechnung der Durchbiegung von Federn benutzte Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma Qr = A.^{**})$$

Lamé nennt diese Gleichung in seinen „Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides" (Paris 1852 und 1866) das Clapeyron'sche Gesetz; er erläutert dasselbe an mehreren Beispielen und hebt dessen Wichtigkeit für die Statik der Bauwerke hervor.

Im Jahre 1864 leitet Clerk Maxwell in der im Philosophical Magazine, Band 27, Seite 294 abgedruckten Abhandlung: „On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames" mittels der Clapeyron'schen Gleichung das im § 10 dieses Buches der „Maxwell'sche Lehrsatz" genannte Gesetz ab und entwickelt mit Hilfe desselben eine allgemeine Theorie des statisch unbestimmten Fachwerks. Er setzt hierbei einen spannungslosen Anfangszustand voraus und lässt Temperaturänderungen unberücksichtigt.

Die erste vollständige Theorie des statisch unbestimmten Fachwerks gab, ebenfalls auf Grund des Gesetzes der virtuellen Verschiebungen, Mohr in seiner bahnbrechenden Arbeit: „Beitrag zur Theorie des Fachwerks" (Zeitschr. des Architekten- u. Ingenieur-Vereins zu Hannover 1874 u. 1875). In dieser Abhandlung findet sich auch der in unserem Buche gegebene Beweis für den Maxwell'schen Satz sowie die Benutzung dieses Satzes zur Bestimmung der Einflusslinie für die Verschiebung eines Fachwerk-Knotenpunktes. Mohr stellte auch zuerst die elastische Linie des geraden Stabes und die Biegungspolygone der Fachwerke mit Hilfe des Seilpolygons dar.

Besonders gefördert wurde die Festigkeitslehre und namentlich die Theorie der statisch unbestimmten Konstruktionen durch das hervorragende Werk des leider so früh verstorbenen italienischen Ingenieurs Castigliano: „Theorie de l'équilibre des systèmes élastiques", 1879, welches eine Fülle schöner Anwendungen auf die Statik der Bauwerke enthält, und an dessen Spitze der mit Hilfe der Clapeyron'schen Gleichung entwickelte Satz von der Abgeleiteten der Formänderungsarbeit sowie der

*) Mém. de l'acad. des sciences 1827, Seite 388.
**) Vergl. die Anmerkung auf Seite 227 dieses Buches.

aus diesem folgende Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit stehen. Den letzteren Satz gab bereits früher Menabrea in der Abhandlung: „Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques“ [Comptes rendus 1858, I, S 1056]*) und, ohne die Arbeiten seiner Vorgänger zu kennen, Fränkel (1882) in der Zeitschrift des Architekten- u. Ingenieur-Vereins zu Hannover.

Bemerkenswerth ist, dass auch Daniel Bernoulli ein Gesetz der kleinsten Biegungsarbeit gerader Stäbe aufstellte und Euler brieflich mittheilte.**) Euler macht hiervon Gebrauch in der seinem berühmten Werke: „Methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes“ angehängten Abhandlung: „De curvis elasticis“, in welcher er bei der Untersuchung der elastischen Linie eines geraden Stabes gleichen Querschnitts und gleicher Elasticität von dem Satze ausgeht: ut inter omnes curvas ejusdem longitudinis, quæ non solum per puncta A et B transeant, sed etiam in his punctis a rectis positione datis tangantur, definiatur ea in qua sit valor hujus expressionis $\int \frac{ds}{R^2}$ minimus. Hierbei bedeutet ds das Bogenelement und R den Krümmungsradius. Setzt man $\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ}$, so erhält man, da $EJ = Konst.$ ist: $\int \frac{M^2 ds}{2EJ}$ *ein minimum.* Das Integral: $\int \frac{ds}{R^2}$ nennt Bernoulli die „vis potentialis“.

Wir schliessen mit der Anführung einiger Schriften, in denen der Leser weitere Anwendungen der in diesem Buche vorgetragenen Gesetze findet.

1. **Castigliano,** *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications.* Turin (bei Negro), 1879.
2. —— *Intorno ad una proprietà dei sistemi elastici. Atti della Accademia delle Scienzi di Torino, Juni 1882;* enthält eine sehr allgemeine Entwickelung des Maxwell'schen Lehrsatzes und einen Bericht über den Satz von Betti, vgl. Seite 227 unseres Buches.
3. **Fränkel,** *Das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben.* Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1882, S. 63.

---

*) Man sehe auch: Comptes rendus, 1884, S. 174.

**) Vergl. Fuss, Correspondance mathématique et physique, Tome II, S. 457, 507, 533.

4. **Gebbia**, *Una questione di priorita su alcune contribuzioni alla teoria dei sistemi articolati.* Il Politechnico 1891.

5. **Könen**, *Vereinfachung der Berechnung kontinuirlicher Balken mit Hilfe des Satzes von der Arbeit.* Wochenbl. f. Archit. u. Ing. 1882, Seite 402.

6. —— *Theorie gekrümmter Erker- und Balkonträger.* Deutsche Bauzeitung 1885, S. 607.

7. **Krohn**, *Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Anwendung desselben zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkträger;* Zeitschr. des Archit.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1884, S. 269. Enthält eine Ableitung des Maxwell'schen Satzes und zeigt, wie dieser Satz in Verbindung mit einem von Williot gegegebenen Formänderungspolygone zur Berechnung statisch unbestimmter Träger benutzt werden kann.

8. **Land**, *Die Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen* u. s. w. Wochenblatt für Baukunde 1887, Seite 14.

9. —— *Ueber die Ermittlung und die gegenseitigen Beziehungen der Einflusslinien für Träger.* Zeitschr. f. Bauwesen 1890, S. 165.

10. —— *Die Ermittlung der Spannungsvertheilung und des Kerns* u. s. w. Zeitschr. f. Bauwesen 1892.*)

11. **Melan**, *Berechnung eiserner Hallengespärre unter Anwendung des Satzes von der kleinsten Arbeit.* Wochenschr. des österr. Archit.- u. Ing.-Ver. 1883, S. 149 u. 162.

12. —— *Ueber den Einfluss der Wärme auf elastische Systeme.* Ebendaselbst 1883, S. 183 u. 202.

13. —— *Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Stabsysteme.* Zeitschrift des österr. Archit.- u. Ing.-Ver. 1884, S. 100.

14. **Mohr**, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks.* Zeitschr. des Archit.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1874, S. 509 und 1875, S. 17.

15. —— *Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkträger.* Ebendaselbst 1881, S. 243.

16. **Müller-Breslau**, *Der Satz von der Abgeleiteten der ideellen Formänderungsarbeit.* Zeitschr. des Archit.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1884, S. 211.

17. —— *Zur Theorie der durch einen Balken versteiften Kette.* Ebendaselbst 1883, S. 347. Diese Arbeit schliesst sich an den in derselben Zeitschrift 1881, S. 57) von demselben Verfasser veröffentlichten Aufsatz an.

*) Der bekannte Satz $\sigma_{AB} = \sigma_{BA}$ (Seite 82 unseres Buches) wird hier mittels des Maxwell'schen Satzes bewiesen und zur Bestimmung der Einflusslinie für σ benutzt.

18. **Müller-Breslau**, *Vereinfachung der Theorie der statisch unbestimmten Bogenträger.* Ebendaselbst 1884, S. 575. Ein Sonderabdruck erschien bei Schmorl u. von Seefeld in Hannover.
19. —— *Theorie des durch einen Balken verstärkten steifen Bogens.* Civilingenieur 1883, S. 13.
20. —— *Influenzlinien für kontinuirliche Träger mit drei Stützpunkten.* Wochenbl. f. Archit. u. Ing. 1883, S. 353.
21. —— *Ueber kontinuirliche Bögen und Balken.* Ebendaselbst 1884.
22. —— *Zur Theorie der Versteifung labiler und flexibler Bogenträger.* Zeitschr. f. Bauwesen 1883, S. 312.
23. —— *Beitrag zur Theorie des durch einen Balken versteiften Bogens.* Ebendaselbst 1884, S. 323.
24. —— *Elasticitäts-Theorie der nach der Stützlinie geformten Tonnengewölbe.* Ebendaselbst 1886.
25. —— *Beitrag zur Theorie der ebenen elastischen Träger.* Zeitschr. des Archit.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1888, S. 605.
26. —— *Beitrag zur Theorie der ebenen elastischen Träger.* Centralblatt der Bauverwaltung 1889.
27. —— *Ueber einige Aufgaben der Statik, welche auf Gleichungen der Clapeyron'schen Art führen.* Zeitschr. f. Bauwesen 1891.
28. —— *Die graphische Statik der Baukonstruktionen,* Bd. II, Abth. 1. 1892. Leipzig, Baumgärtners Buchhandlung.
29. —— *Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks,* 1892. Berlin, Ernst u. Sohn.
30. **Ovazza**, *Sul calcolo delle deformazioni dei sistemi articolati.* Atti della Academia delle Scienze di Torino, vol. XXIII, 1888.
31. —— *Sul calcolo delle freccie elastice delle travi reticolari,* ebendadaselbst vol. XXIII, 1888.
32. **Stelzel**, *Berechnung der Ferdinandsbrücke in Graz.* Enthalten in der Schrift: v. Gabriely u. Winter, Ferdinandsbrücke in Graz, Mittheilungen des Polytechnischen Klubs in Graz 1883.
33. **Swain**, *On the application of the principle of virtual velocities to the determination of the deflection and stresses of frames.* Journal of the Franklin Institute 1883, Febr. bis April, S. 102, 194, 250.
34. **Weyrauch**, *Theorie elastischer Körper.* Leipzig (bei Teubner) 1884.
35. —— *Aufgaben zur Theorie elastischer Körper.* Ebendaselbst 1885.
36. —— *Arbeitsbedingungen für statisch unbestimmte Systeme.* Wochenbl. f. Archit. u. Ing. 1884, S. 200.
37. **Winkler**, *Berechnung der Windverstrebungen in Brücken mit zwei Trägern.* Civilingenieur 1884, S. 211.

Inhalt.

Abschnitt I. Theorie des Fachwerks.

Abschnitt II. Biegungsfestigkeit gerader und einfach gekrümmter Stäbe.

Abschnitt III.

Anhang.